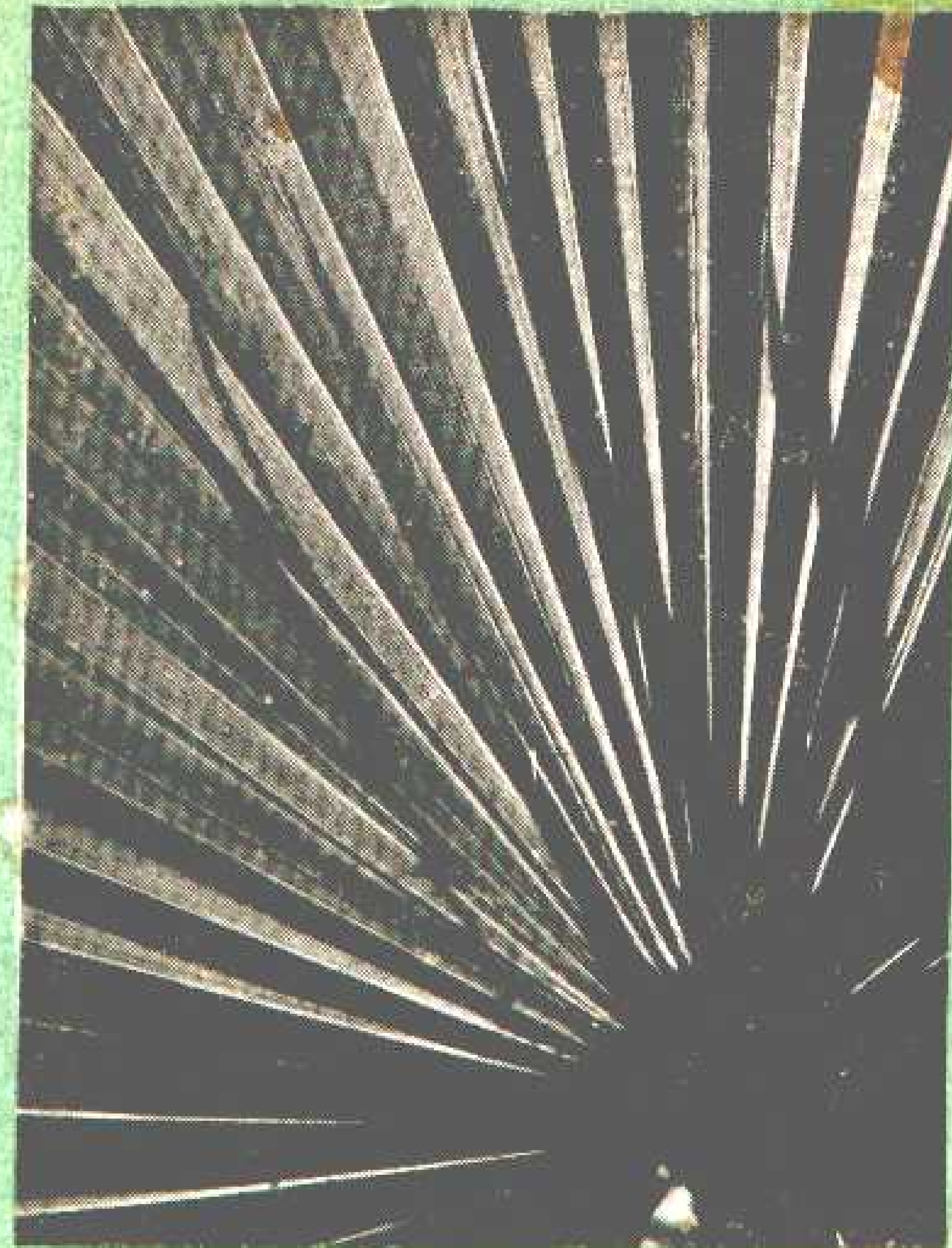
K. L. WOLF - D. KUHN



3

FORMA Y SIMETRIA

EDITORIAL UNIVERSITARIA DE BUENOS AIRES

FORMA Y SIMETRÍA

3 COLECCIÓN CUADERNOS

Ana Pasarin

PROFESORA
ANA MARTINEZ PASARIN

FORMA Y SIMETRÍA

Una sistemática de los cuerpos simétricos

K. L. WOLF y D. KUHN

EUDEBA EDITORIAL UNIVERSITARIA DE BUENOS AIRES

Título de la obra original: *Gestalt und Symmetrie. Eine Systematik der Symmetrischen Körper*
Tübingen, Max Niemeyer Verlag, 1952

Traducida por
RENATE LEISSE DE MERTIG Y MARIO H. GRADOWCZYK

EDITORIAL UNIVERSITARIA DE BUENOS AIRES
Sociedad de Economía Mixta - Florida 656 - Buenos Aires

PRINTED IN ARGENTINE - IMPRESO EN ARGENTINA

A la memoria
de la señora Frida Piper von Buhl

El estudio que desarrollamos en este libro fue expuesto por primera vez en 1952, en el Colloquium Palatinum, en la casa de Buhl-Deidesheim. La primera parte da un panorama breve sobre la sistemática de los cuerpos simétricos. La segunda parte intenta una aplicación al estudio biológico de la forma, según algunos ejemplos de la naturaleza. Agradecemos al profesor DR. W. TROLL, de Maguncia, por su experto consejo en la selección de estos ejemplos.

Para las figuras 22, 24, 25, 27, 28 y 29, como también para los dibujos de las tablas 4 y 5, se siguieron los modelos de ENGLER-PRANTL, KÜHN, OLTMANNS y TROLL.

DEFINICIONES

La palabra *simetría* proviene del griego *sy'mmetros* —que significa mensurado, adecuado, proporcionado, de proporción apropiada, de medida conveniente o también en el momento oportuno—, e indica la posición que ocupan las partes de un todo entre sí. La simetría está dada por la relación (bella) de una parte con otra y de las partes con el todo. Su expresión manifiesta se encuentra en la repetición regular de motivos y circunstancias similares o iguales, parecidas o afines. La simetría provee la base natural para un ordenamiento sistemático de la variedad de todas las formas [1] (espaciales, temporales u otras).

Las partes elementales de la observación de la simetría ya no son figuras (espacia-

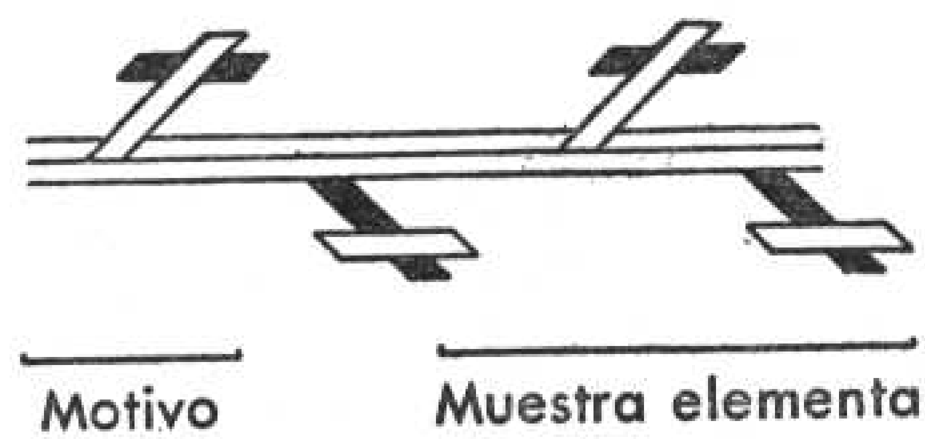


FIG. 1. *Motivo y muestra elemental.*

les, temporales u otras), relacionadas simétricamente entre sí, sino "motivos". Se

[1] Véase también la definición de K. L. WOLF, en "Harmonie, Symmetrie und Bauplan", *Beiträge zur christlichen Philosophie,* 1948, 3er fasc. pág. 23: "Simetría significa una armonización de diferentes partes de un todo; está dada por la relación (bella) de una parte con otra y de las partes con el todo; se expresa (ante todo) en la repetición de lo igual, ya sea que en un determinado objeto se repita un motivo o una actitud o que se puedan igualar ampliamente objetos diferentes. Si la forma es lo que da vida e importancia a la idea de lo bello, entonces se encuentra simetría en todos aquellos casos en los cuales las ideas se manifiestan en la materia." Véase también: K. L. WOLF, D. KUHN y R. WOLFF, "Symmetrie und Polarität", *Studium Generale*, 1949, t. 2, Nos 4 y 5, pág. 213: "La simetría está dada por la relación (bella) de una parte con la otra y de las partes con el todo, y se exterioriza en la repetición (espacial y temporal) de elementos, motivos o actitudes similares."

denomina muestra elemental al agrupamiento más pequeño de motivos que determina toda la simetría (fig. 1)[1]. Así como el átomo (o molécula) es el individuo [2] de una sustancia, la muestra elemental es el individuo de una figura simétrica y es similar a la célula elemental, que es el individuo constituyente del reticulado espacial.

Para evidenciar la simetría se utilizan *operaciones de superposición*. Por medio de estas operaciones o movimientos, las cosas cuya simetría se desea analizar se superponen consigo mismas (retratan sobre sí mismas), mediante convenientes cambios de posición.

[1] El motivo es análogo a las partículas elementales de la sustancia (electrón, protón, neutrón), las cuales ya no son sustancias; la muestra elemental es análoga al átomo (o molécula), en el dominio de la materia, como agrupamiento mínimo de partículas elementales que determinan completamente el ser de una sustancia. Véase también: K. L. WOLF, *Theoretische Chemie*, Leipzig, 1953, 3ª ed.

[2] Sobre el concepto general de individuo y de átomo, como también sobre el uso del de átomo y molécula, véase K. L. WOLF, "Zur Systematik der organismischen Verbindungen", *Hefte zur Morphologie*, Weimar, 1953.

Estas operaciones proporcionan los recursos metódicos necesarios para el estudio de la simetría, y cumplen dentro de ella una función similar a la que desempeñan las operaciones elementales de cálculo en el álgebra. Para el estudio de la simetría se utilizan, en forma análoga al álgebra, los recursos de las matemáticas ("teoría de grupos")[3] y de acuerdo con sus métodos, la simetría estructura y clasifica la variedad de posibles formas efectivas, teniendo en cuenta su clase y cantidad.

Los verdaderos órganos de simetría [4] son aquellas figuras geométricas, tales como planos o rectas, que producen las operaciones de superposición. Por ejemplo, en un octógono regular, la recta perpendicular a su plano y que pasa por el centro de la figura es órgano de simetría (eje de rotación de orden 8 con el símbolo D_8); las correspondientes operaciones de superposición son rotaciones de 45° y sus múltiplos.

[3] Véase, por ejemplo: A. SPEISER, *Theorie der Gruppen endlicher Ordnung*, Berlín, 1927, 2ª edición.

[4] Los órganos de simetría se denominan tradicionalmente "elementos de simetría".

CAPÍTULO II

EL SISTEMA DE LOS CUERPOS SIMÉTRICOS

1. Grupos principales. El plan de formación de la simetría está determinado por el ordenamiento de los órganos de simetría según su especie, posición y número, y caracteriza la clase de simetría. Con el conocimiento de todos los órganos de simetría, o sea de todas las operaciones de superposición (simples y compuestas)

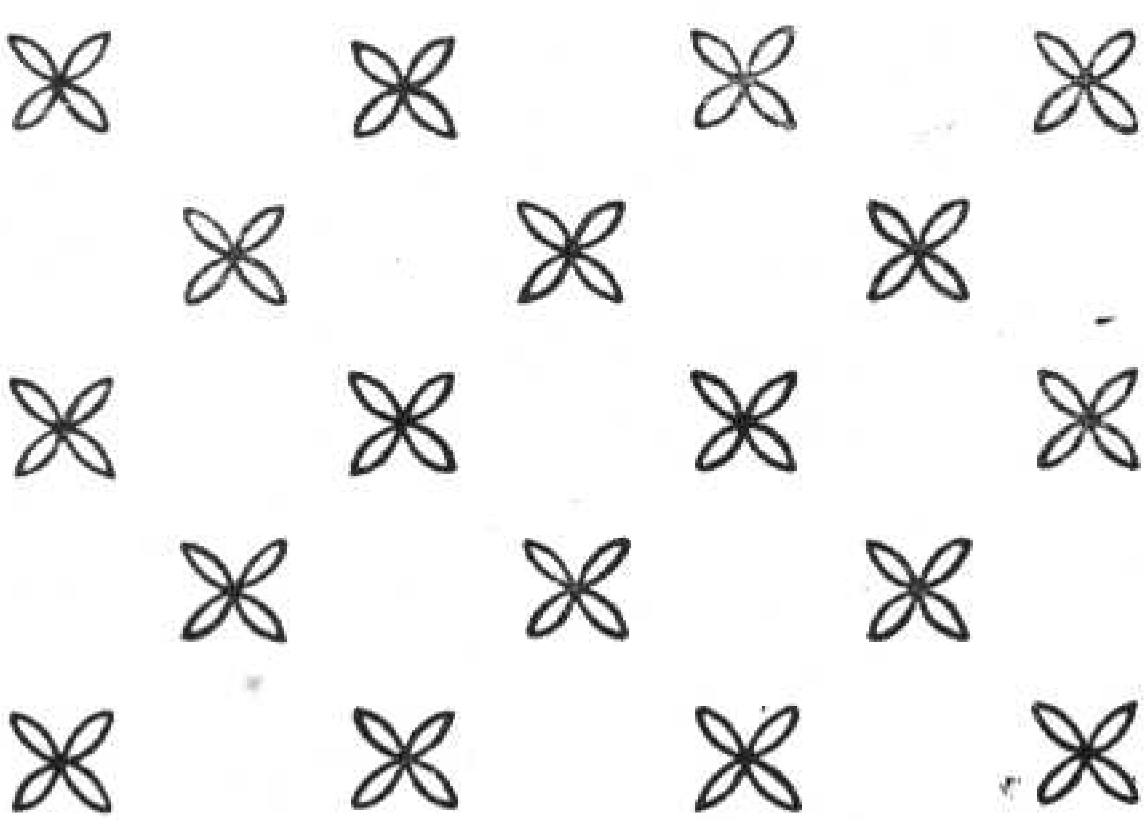


FIG. 2. *Ornamento isométrico.*

y sus combinaciones, se puede llegar al conocimiento de todas las clases y números de simetrías posibles, y a una *sistemática de los cuerpos simétricos,* por medio de una conveniente ordenación y selección.

Los cuerpos simétricos se clasifican según los órganos de simetría, que pueden ser puntiformes, rectos y planos *(ortosimétricos)*, o curvos *(kyrtosimétricos)*. La subdivisión sistemática se basa en el grado de parentesco que existe entre las muestras elementales [1].

En la *simetría isométrica,* los motivos no son distinguibles entre sí y su disposición se repite uniformemente (por ejemplo las figuras de la red plana de la fig. 2). El conjunto está determinado por el carácter de los motivos y la posición relativa que ocupan entre sí. Esta clase de simetría se llama isometría debido a la igualdad de los motivos y su repetición regular.

En la *simetría homeométrica,* los motivos son semejantes entre sí (por ejemplo

[1] El escalonamiento completo se encuentra en K. L. WOLF y otros, "Symmetrie und Polarität", *Studium Generale,* 1949, t. 2, Nos 4 y 5, pág. 214.

de igual forma, pero tamaño diferente) y aumentan o se repiten en sucesión monótona, de manera tal que un motivo se modifica con respecto al siguiente en tamaño, posición o situación, según una ley cualquiera. (Se da, como ejemplo, una serie de circunferencias inscritas en un ángulo y tangentes entre sí, fig. 3.) El conjunto está definido por la variación del motivo y la variación de su repetición. Llamamos homeometría a esta clase de simetría; pero también se puede hablar de simetría diferencial, porque hay una repetición de variaciones iguales.

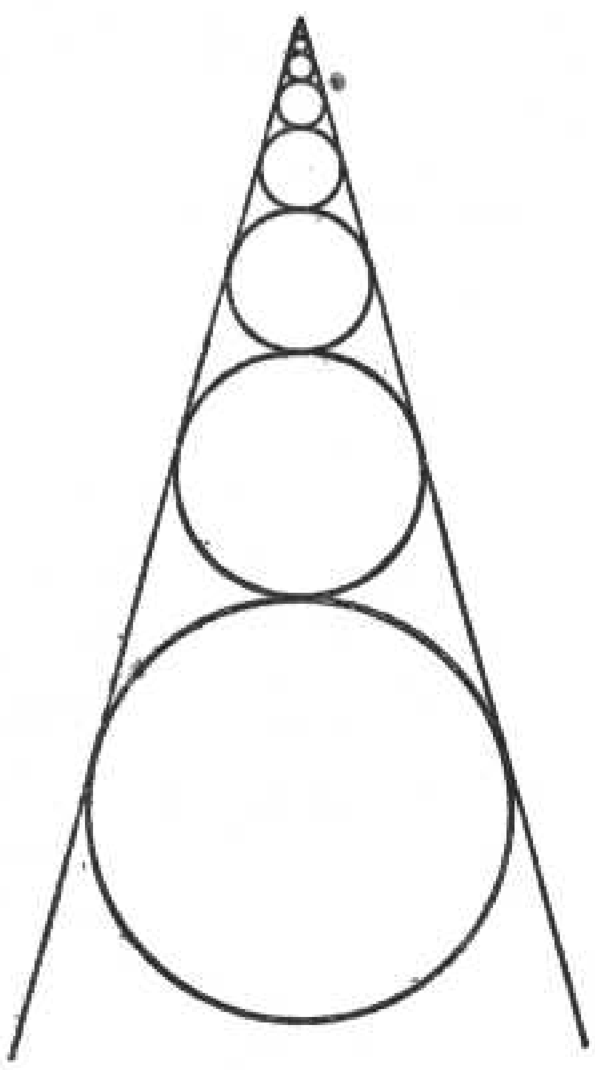


FIG. 3. *Ornamento homeométrico.*

En la *simetría catamétrica,* los motivos no tienen (con respecto a su configuración en el espacio y en el tiempo) igual forma y tamaño; pero están vinculados entre sí por una relación común, o sus formas continúan siendo análogas, y su sucesión está vinculada por una ley (por ejemplo, la sucesión de polígonos regulares referidos a la circunferencia, y ordenados según el número de vértices, fig. 4). Según la clase y grado de analogía, existe

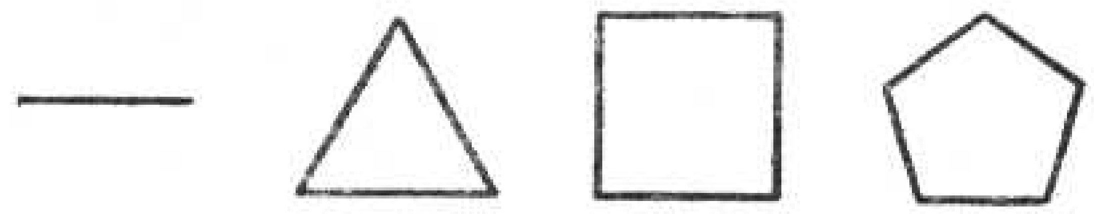


FIG. 4. *Ornamento catamétrico.*

una gradación que va desde la isometría hasta la homeometría y de ésta, a simetrías cada vez más generales (o de grado inferior).

Se dice que hay ametría cuando los motivos no son de ningún modo iguales, parecidos o afines, ni están relacionados entre sí; es decir, que no hay simetría de ninguna especie.

La isometría, la homeometría y los grados inferiores de la simetría abarcan y articulan todo el campo de la orto y kyrtosimetría. Cuando la simetría se manifiesta como repetición de algo igual o algo variado (parecido, análogo) según una determinada ley, o sea, que está comprendida dentro de la homeometría y katametría (afinidad de figuras), abarca también, en la oposición de lo diferente, una clase de polaridad. Esto se debe a que en dos direcciones opuestas, al menos, se enfrenta lo contrastante (opuesto), en figura, posición o comportamiento, y que está ligado consecuentemente por lo parecido (por ejemplo el punto como la menor y la recta como la mayor circunferencia en la fig. 3), de manera tal que, en el campo de la homeometría, por principio, siempre hay *polaridad* [1].

2. Las operaciones de superposición y su composición. La observación ulterior de los cuerpos ortosimétricos hace necesaria una discusión detallada, con el objeto de averiguar la clase y cantidad de los órganos de simetría puntiformes, rectos o planos, y de las operaciones de superposición (es decir, las transformaciones en las cuales se basan las operaciones de superposición). En la tabla 1 (págs. 14 y 15) se dan todas las *operaciones de superposición ortosimétricas simples* y los órganos de simetría correspondientes:

1. *Identidad* (i). Es la representación invariada del objeto sobre sí mismo. Toda figura de forma constante posee esta clase de simetría. La operación de superposición se puede describir como una rotación de 0° ó 360° alrededor de un punto de identidad (I).

2. *Traslación* (t). La traslación es un corrimiento simple y en línea recta. Como ejemplo, la traslación de un tramo de vía de ferrocarril en uno o más durmientes a lo largo de un eje longitudinal denominado eje de traslación o de deslizamiento (T). La longitud mínima con que hay que trasladar dicho tramo de vía para llegar a la superposición (la distancia entre dos durmientes sucesivos) se llama longitud de identidad, longitud de traslación o período. Como operación de superposición, la traslación sólo tiene interés para aquellas figuras simétricas que presentan una repetición infinita ("rapport" [2] infinito, ninguna limitación), por lo menos en una dirección.

3. *Rotación* (r)[3]. La rotación es el giro del cuerpo alrededor de un eje, el eje de rotación (R).

La cantidad de posiciones de superposición que recorre el cuerpo antes de volver a su posición inicial (identidad), da el orden de la rotación. Por ejemplo, un cuadrado tiene, además de otros órganos de simetría, un eje de rotación de orden 4, R_4, que pasa por el centro y es perpendicular a su plano. La rotación también es una operación de superposición de

[1] Véase la definición de polaridad para el dominio de la botánica, en W. TROLL, *Allgemeine Botanik,* Stuttgart, 1948, pág. 85.

[N. del T.: *Polaridad* es la formación diferenciada de los extremos opuestos (polos) del eje de un cuerpo. En filosofía: oposición en la que un extremo implica y complementa al otro.]

[2] *Rapport* es la repetición regular de un motivo dentro de un plano articulado ornamentalmente; p. ej.: alfombras, empapelados. (N. del T.)

[3] Una rotación puede remplazarse, por principio, por dos reflexiones especulares acopladas, y tendría entonces el símbolo *ss.* Como en esta operación de las dos reflexiones especulares resultó un movimiento simple, se lo puede denominar, independientemente, rotación *r.* Sobre la así llamada ley de los planos de reflexión especular como "elemento universal de simetría", véase P. NIGGLI, *Mineralogie und Kristallchemie,* Berlín, 1941, 3ª ed., 1ª parte, pág. 29.

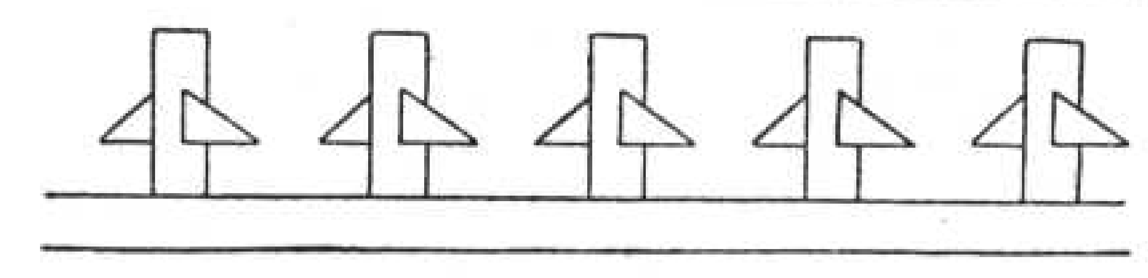
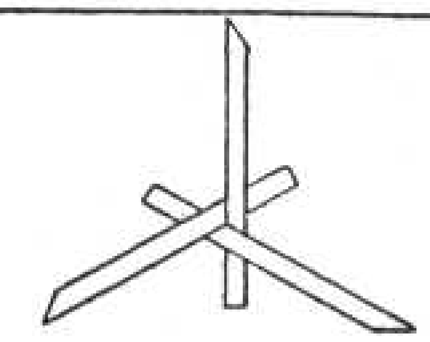
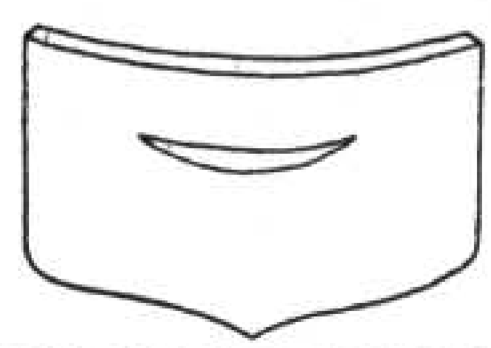
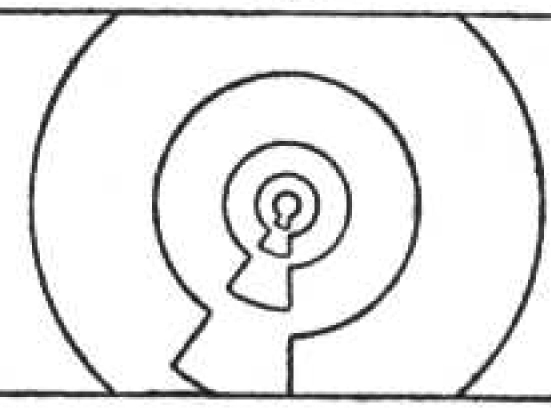
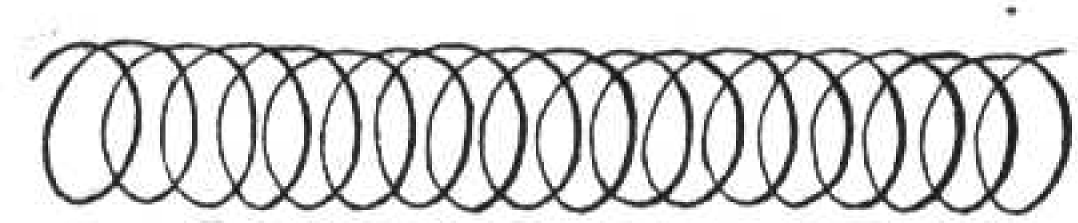
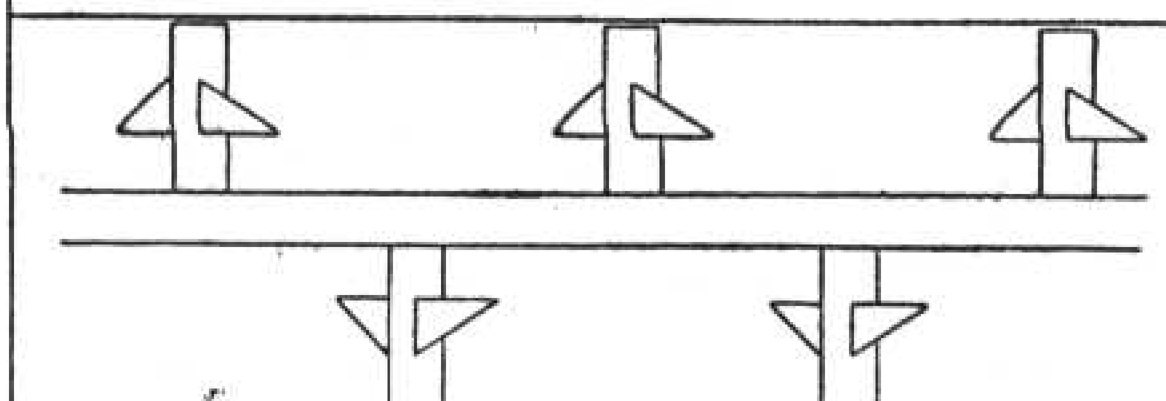
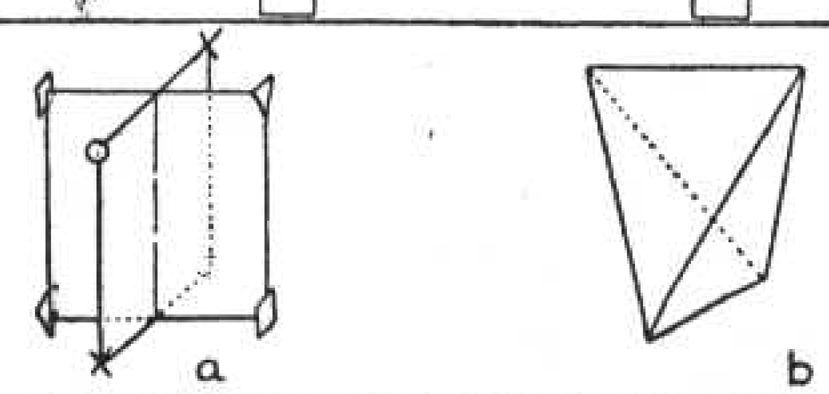
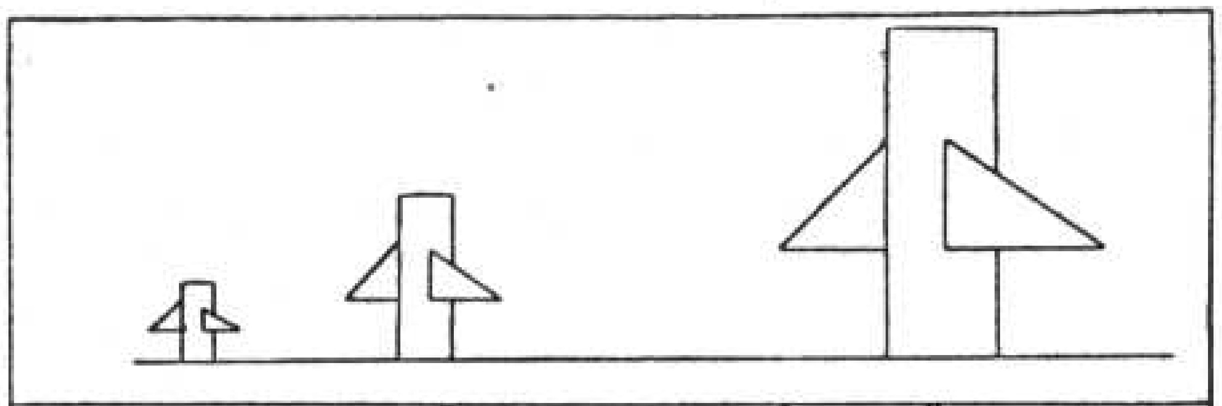
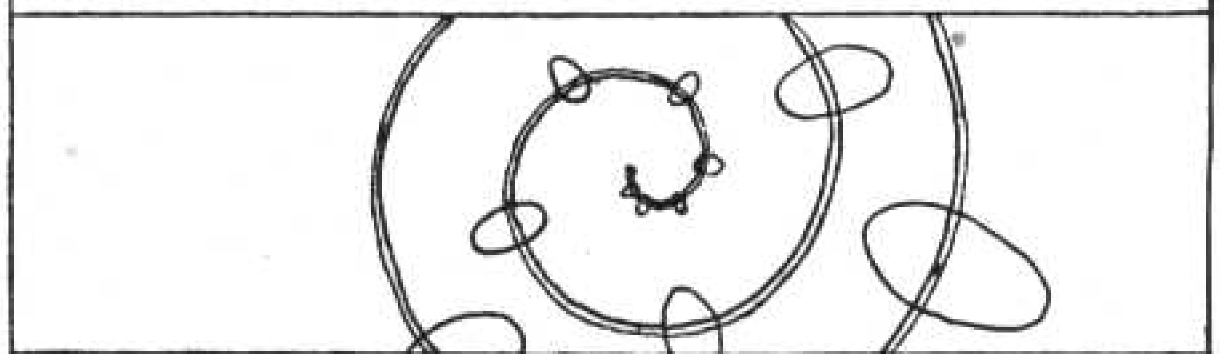
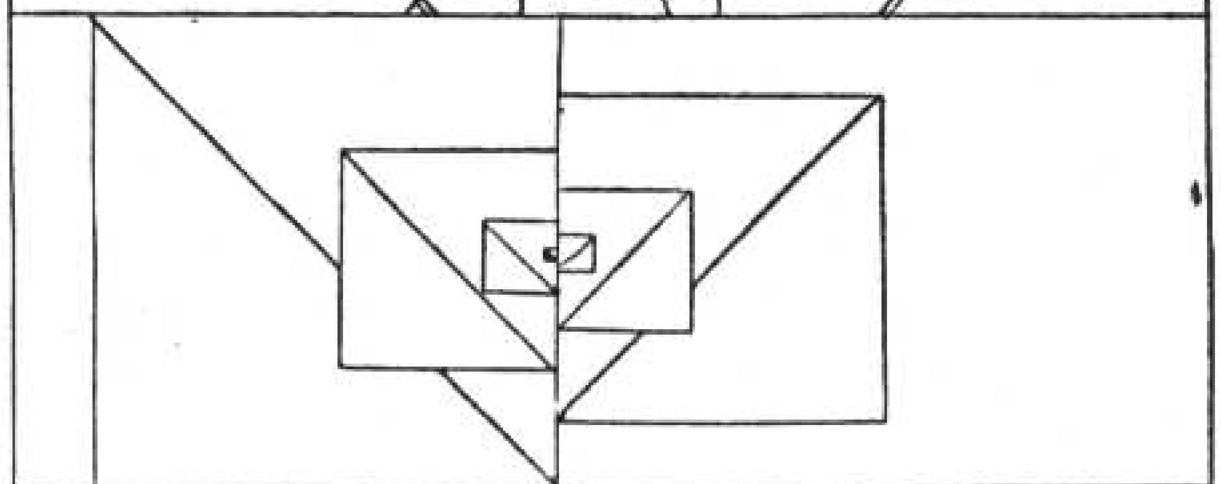
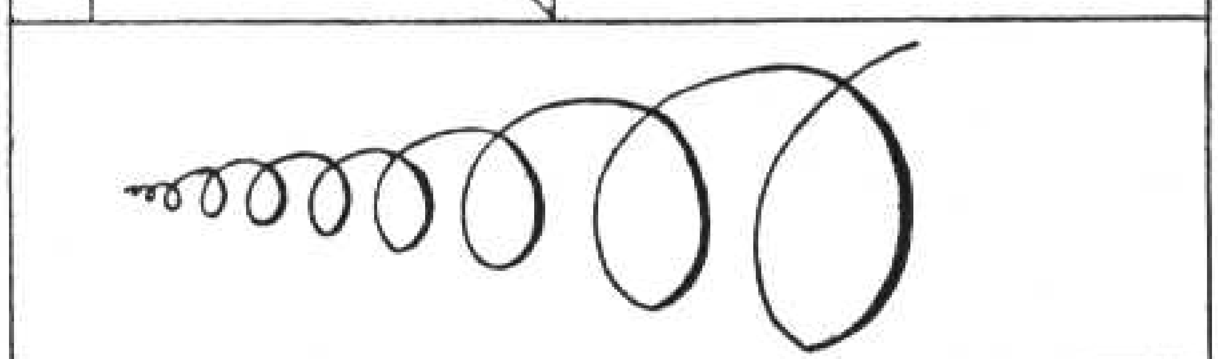
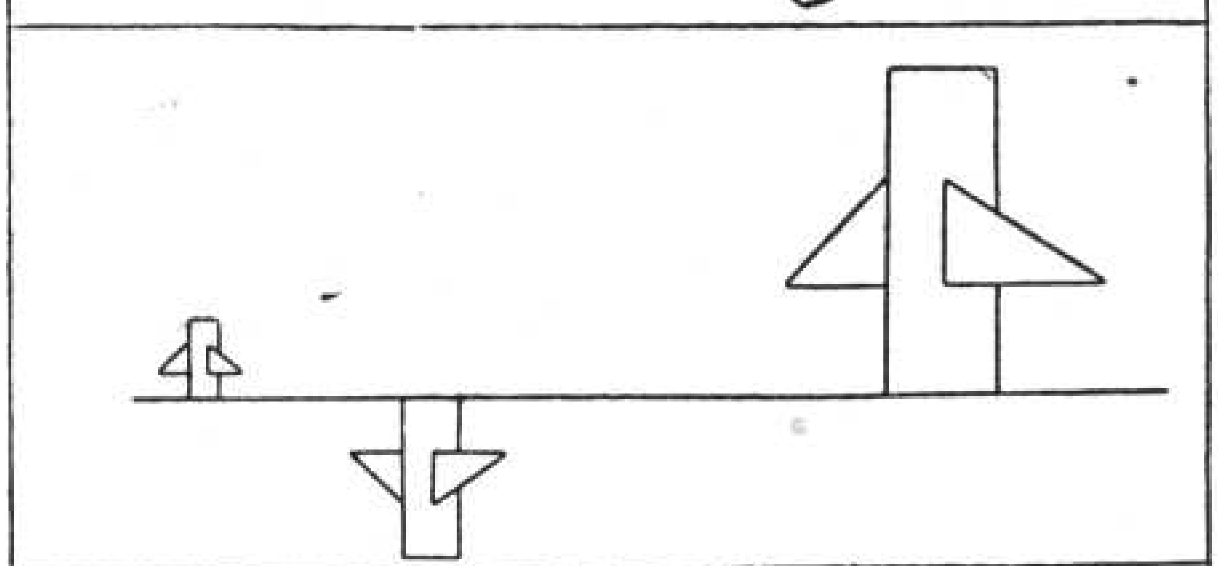
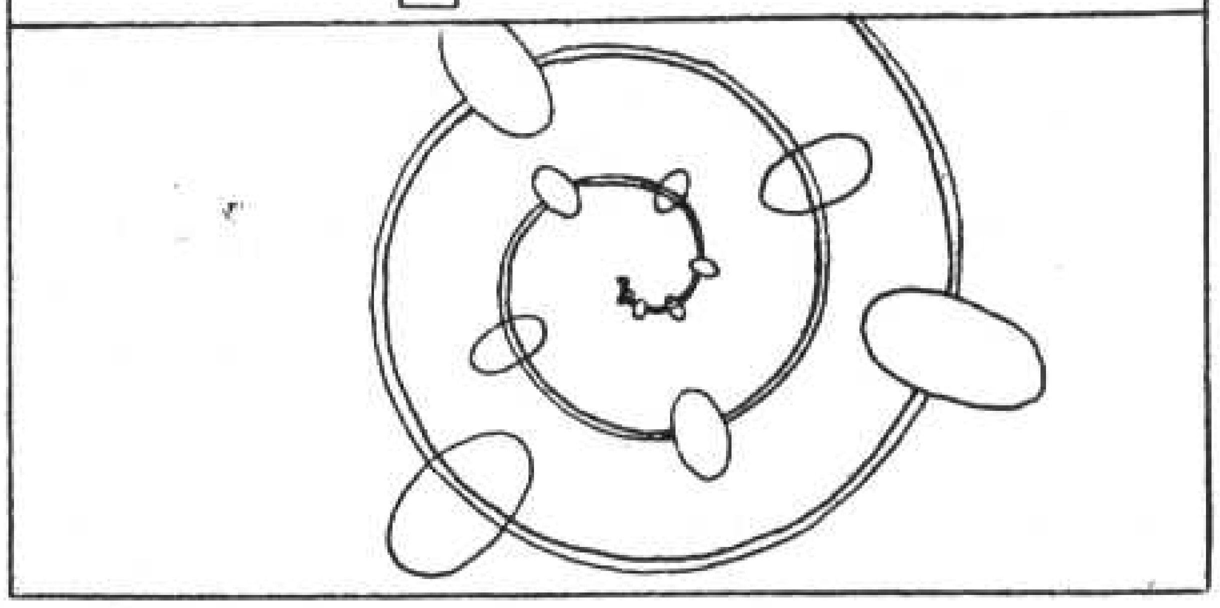
OPERACIÓN DE SUPERPOSICIÓN CARACTERÍSTICA	EJEMPLO	OPERACIÓN DE SUPERPOSICIÓN DEL EJEMPLO
2. Traslación (t)		t
3. Rotación (r)		r
4. Reflexión especular (s)		s
5. Extensión (e)		e
6. Rotación traslatoria o movimiento helicoidal (tr)		$t + tr$
7. Reflexión traslatoria (ts)		$t + ts$
8. Reflexión rotatoria (rs)		a) rs b) $r + s + rs$

TABLA 1. *Las operaciones de superposición simples y acopladas.*

OPERACIÓN DE SUPERPOSICIÓN CARACTERÍSTICA	EJEMPLO	OPERACIÓN DE SUPERPOSICIÓN DEL EJEMPLO
9. Extensión traslatoria (*te*)		*te*
10. Extensión rotatoria (*re*)		*re*
11. Extensión refleja (*se*)		*se*
12. Extensión helicoidal (*tre*)		*tre* + *te*
13. Extensión reflejo-traslatoria (*tse*)		*tse* + *te*
14. Extensión reflejo-rotatoria (*rse*)		*rse* + *re*

"rapport" infinito, con tal que se pueda repetir el giro correspondiente tanto como se quiera y se llegue siempre de nuevo a la superposición. A diferencia de la traslación existe una limitación, a pesar del "rapport" infinito.

Los ejes de rotación de orden 2 se distinguen de los de orden mayor porque son ejes de abatimiento (K), y son los únicos que producen rotaciones en las cuales cada dirección espacial del cuerpo se superpone a sí misma (fig. 5).

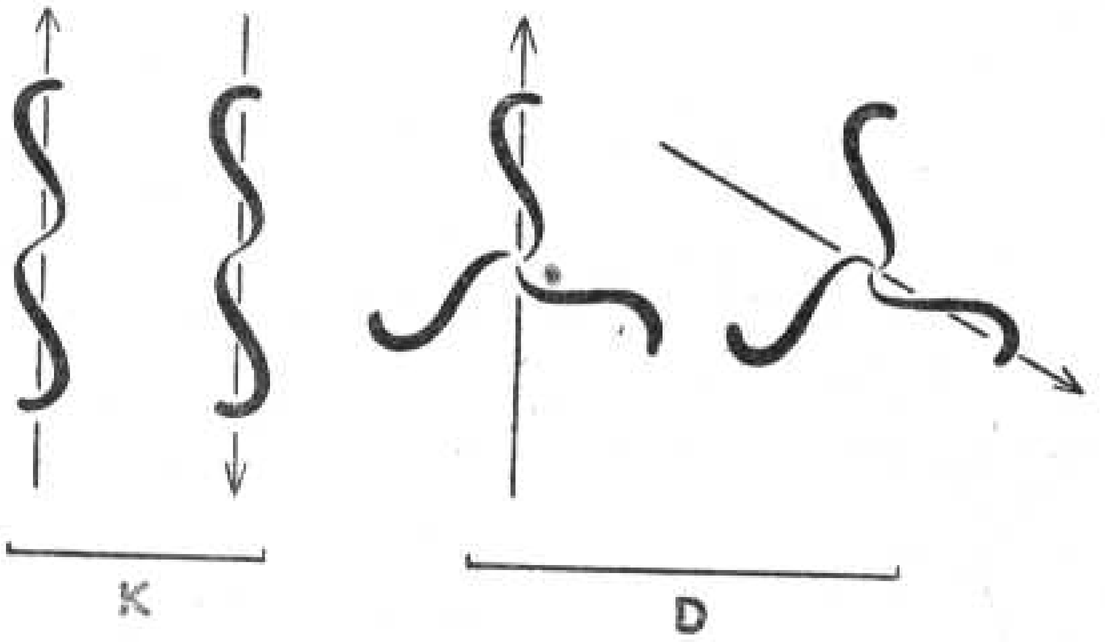


FIG. 5. *Abatimiento* (R_2) *y rotación* (R_3).

4. *Reflexión especular* (s). La reflexión especular no es un movimiento propiamente dicho, como las dos operaciones anteriores, sino un retrato bilateral en el que se invierten los lados. Puede efectuarse según ejes o planos (S) del cuerpo considerado. Para la percepción humana parece ser más notable la reflexión especular con el espejo en posición vertical, que aquella en que está en posición horizontal.

Los motivos, las longitudes de identidad y los ángulos de rotación son los invariantes de la isometría. La identidad, traslación y rotación son operaciones de superposición de primera especie y se pueden contraponer a la reflexión especular, que es una operación de superposición de segunda especie. Todo cuerpo simétrico que sólo posee punto de identidad, eje de traslación y eje de rotación siempre tiene una imagen especular diferente de sí misma, con la que únicamente llegará a superponerse por medio de una operación de segunda especie [1].

5. *Extensión* (e). La extensión es una variación o multiplicación monótona del motivo, desde un punto singular o punto de extensión (E), y en la cual el motivo permanece semejante a sí mismo. Así, un conjunto de circunferencias concéntricas cuyos radios crecen con regularidad.

Todas las operaciones de superposición iso y homeométricas simples existentes son: identidad, traslación, rotación, reflexión especular y extensión.

No es necesario que sobre un cuerpo exista una sola operación de superposición, sino que pueden aparecer varias (una mesa cuadrada tiene, por ejemplo, rotaciones y reflexiones especulares). Están entonces, como en el ejemplo recién dado, combinadas de tal modo entre sí que cada una, considerada como operación aislada, conduce a la superposición

[1] J. NICOLLE, *La symétrie et ses applications*, París, A. Michel, 1950, pág. 31: "La propiedad fundamental de la simetría especular es que da una figura distinta, en su orientación, de la figura primitiva y que repetida una segunda vez, devuelve la figura primitiva. En este sentido la simetría especular es una operación de involución." (N. del T.)

y, por consiguiente, permanece independiente (*combinación* de operaciones de superposición), o si no están acopladas de tal manera —individualmente latentes— que solamente juntas llevan a cabo la superposición (*acoplamiento* de operaciones de superposición). Una operación de este tipo es, por ejemplo, la reflexión traslatoria (*ts*) que resulta del acoplamiento de una traslación y una reflexión especular. Ésta aparece cuando, además de una traslación simple, de longitud de identidad *a*, se necesita para llegar a la superposición una traslación con una "distancia de repetición" $a/2$, unida a una reflexión especular simultánea. Una reflexión traslatoria aparece, por ejemplo, en una sinusoide regular; en este caso, no llevan a la superposición ni la traslación simple de valor $a/2$ ni la reflexión según su eje longitudinal por separado. Como dos reflexiones traslatorias de período $a/2$ implican una traslación sobre el eje de período *a*, la reflexión traslatoria está siempre combinada con una traslación independiente de doble período *a*. El eje de traslación (*T*) pertenece al plano de la reflexión traslatoria.

El estudio de todas las posibilidades de combinación de las operaciones de superposición simples conduce a una recopilación completa de las operaciones de superposición acopladas. Sólo existe la necesidad de considerar aquellos acoplamientos en los que cada operación de superposición simple esté contenida una sola vez. Ya que si se acoplan, por ejemplo, dos traslaciones de direcciones diferentes se las puede remplazar por una sola en la dirección resultante. Al acoplar dos rotaciones aparece otra rotación. La unión de reflexiones especulares produce una rotación si el número de reflexiones es par, y rotación con reflexión especular (reflexión rotatoria) si es impar.

Las operaciones de superposición acopladas independientes (ver tabla 1) son las que se mencionan a continuación [1].

[1] Para las operaciones de superposición obtenidas por acoplamiento se mantiene, en los símbolos, el orden establecido por los autores. Para los términos compuestos que figuran a continuación no se ha mantenido, por razones idiomáticas, el orden con que aparecen en alemán. Se ha optado, pues, por la siguiente traducción:

GLEITDREHUNG *(traslacio-rotación)**	ROTACIÓN TRASLATORIA
GLEITSPIEGELUNG *(traslacio-reflexión)*	REFLEXIÓN TRASLATORIA
DREHSPIEGELUNG *(rotacio-reflexión)*	REFLEXIÓN ROTATORIA
GLEITSTREKKUNG *(traslacio-extensión)*	EXTENSIÓN TRASLATORIA
DREHSTREKKUNG *(rotacio-extensión)*	EXTENSIÓN ROTATORIA
SPIEGELSTREKKUNG *(reflexio-extensión)*	EXTENSIÓN REFLEJA
SCHRAUBSTREKKUNG *(helico-extensión)*	EXTENSIÓN HELICOIDAL
GLEITSPIEGELSTREKKUNG *(traslacio-reflexio-extensión)*	EXTENSIÓN REFLEJO-TRASLATORIA
DREHSPIEGELSTREKKUNG *(rotacio-reflexio-extensión)*	EXTENSIÓN REFLEJO-ROTATORIA

* *Las formas que se dan entre paréntesis reproducen literalmente el término del original.* (N. del E.)

6. *Movimiento helicoidal* (*tr*) o rotación traslatoria. Es el acoplamiento de traslación y rotación y da una operación independiente que, como la reflexión traslatoria, siempre está unida a la traslación pura. Antes que el cuerpo recorra una longitud de identidad de la traslación pura, se superpone a sí mismo tantas veces como lo indica el orden del eje de rotación acoplado a la traslación o eje helicoidal (*TR*). Por ejemplo, el orden del eje de rotación de una hélice matemática es infinito (circunferencia); si existe una longitud de identidad de traslación (paso), la hélice se superpone a sí misma infinitas veces. En el movimiento helicoidal los ejes de rotación y de traslación son coincidentes.

7. *Reflexión traslatoria* (*ts*). Es el acoplamiento de traslación y reflexión especular a lo largo de un eje de reflexión traslatoria (*TS*). (Véase lo dicho anteriormente.)

8. *Reflexión rotatoria* (*rs*). Es el acoplamiento de rotación y reflexión especular. Como dos reflexiones especulares equivalen a una rotación, un eje de reflexión rotatoria (*RS*) de orden *n* es a la vez siempre un eje de rotación de orden *n*/2. El caso especial de una rotación de 180° (abatimiento), con reflexión especular en planos perpendiculares al eje de rotación, siempre produce instantáneamente un centro de simetría (*C*): cada punto *P* del cuerpo tiene su correspondiente *P'* de igual valor y que se encuentra si se traza una recta desde *P* que pase por el centro de simetría. Este caso especial de la reflexión rotatoria se denomina también *inversión*.

La reflexión helicoidal es la última de las posibilidades de acoplamiento isométricas (acoplamiento de traslación, rotación y reflexión especular) y ya no se puede realizar como operación de superposición, pues la reflexión en planos que tienen la dirección del eje de traslación y en planos perpendiculares a dicho eje invierte el sentido de rotación del movimiento helicoidal y, por consiguiente, aparecen partes que ya no pueden ser llevadas a la superposición mediante operaciones de primera especie. (Véase lo dicho anteriormente.)

9. *Extensión traslatoria* (*te*). Es un acoplamiento de traslación con extensión y se produce a lo largo de un eje de extensión (*TE*). La traslación pura no se puede ligar con la extensión traslatoria, ya que cambian los motivos y las distancias. Además de la extensión traslatoria propiamente dicha, en la cual la traslación (acoplada a la extensión) y el motivo están extendidos en la misma medida, pueden aparecer como variantes:

a) una extensión traslatoria con extensión exclusiva del motivo;

b) una extensión traslatoria con extensión exclusiva de la traslación. Las dos son operaciones de superposición homeométricas mezcladas (fig. 6).

10. *Extensión rotatoria* (*re*). Es el acoplamiento de rotación y extensión alrededor del punto de extensión rotatoria

(*RE*). Además de la extensión rotatoria puramente homeométrica, en la cual están extendidos el radio de rotación, el ángulo de rotación y el motivo, pueden aparecer como variantes de carácter iso-homeométrico mezclado:

a) extensión del ángulo de rotación y del motivo, manteniendo constante el radio de rotación;

b) extensión del ángulo de rotación, manteniendo constante el motivo y el radio de rotación;

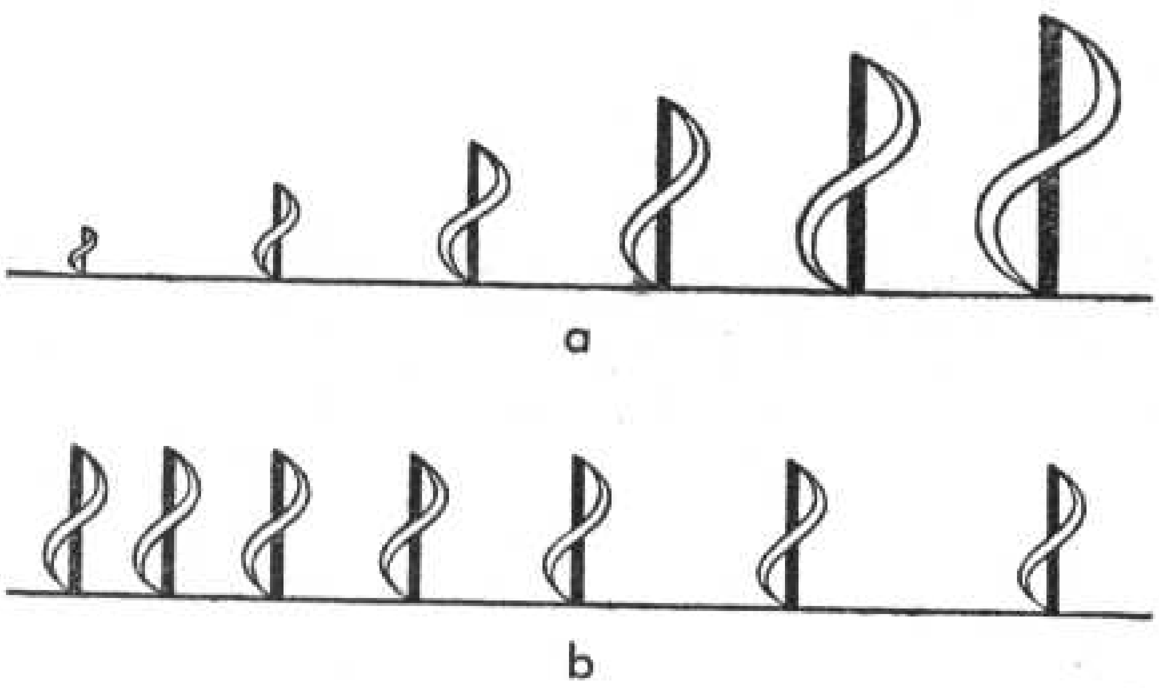


FIG. 6. *Variedades de extensión traslatoria.*

c) extensión del radio de rotación, manteniendo constantes el motivo y el ángulo;

d) extensión del radio y del motivo, manteniendo constante el ángulo;

e) extensión del radio y del ángulo, manteniendo constante el motivo.

Así como la introducción de la polaridad en la extensión traslatoria hace desaparecer la traslación pura, la extensión rotatoria no puede unirse con una rotación pura alrededor de un mismo eje.

11. *Extensión refleja* (*se*). Es el acoplamiento de reflexión especular y extensión. La extensión refleja tiene por característica que no se corre el punto de extensión (*SE*) del motivo, al igual que para la extensión pura.

12. *Extensión helicoidal* (*tre*). Es el acoplamiento de traslación, rotación y extensión a lo largo del eje de extensión helicoidal (*TRE*). Se comporta como el movimiento helicoidal, pero carece de la traslación pura debido a la polaridad, que siempre va unida a la extensión. La extensión helicoidal siempre está combinada con la extensión traslatoria, la cual es para el caso de la extensión, lo que la traslación es para los movimientos sin extensión.

La extensión helicoidal homeométrica pura, en la cual están extendidos los radios de rotación, ángulos de rotación, traslación y motivo, tiene, al igual que la extensión traslatoria y la extensión rotatoria, variedades iso-homeométricas.

13. *Extensión reflejo-traslatoria* (*tse*). Es el acoplamiento de traslación, reflexión especular y extensión a lo largo del eje de extensión reflejo-traslatoria (*TSE*). Resulta de acoplar a la reflexión traslatoria una extensión del motivo y una extensión de la longitud de traslación. No presenta fundamentalmente nada nuevo, con excepción de la ausencia de la traslación pura y la aparición de la extensión traslatoria.

Las variedades iso-homeométricas mezcladas se componen, como en la extensión traslatoria, de la extensión del motivo o de la operación.

14. *Extensión reflejo-rotatoria* (*rse*). Es el acoplamiento de rotación, reflexión especular y extensión a lo largo del órgano de extensión reflejo-rotatoria (*RSE*). Con ella siempre va combinada una extensión rotatoria pura. El ángulo de rotación, el radio de rotación y el motivo están extendidos. Las variantes corresponden a las de la extensión rotatoria.

La extensión helicoidal refleja, no existe como acoplamiento de las cuatro operaciones de superposición simples, ya que la reflexión helicoidal no es una operación de superposición independiente, como se indicó arriba.

Las operaciones de superposición, movimiento helicoidal, reflexión traslatoria, reflexión rotatoria, extensión traslatoria, extensión rotatoria, extensión refleja, extensión helicoidal, extensión reflejo-traslatoria y extensión reflejo-rotatoria, son todas las operaciones de superposición acopladas iso-homeométricas.

No están incluidas por ahora, de acuerdo con la definición de operación de superposición, aquellas repeticiones en las cuales no existe un "rapport" infinito en las transformaciones lineales y cíclicas iso y homeométricas, o sea en las cuales, si se proyectó un "rapport" infinito, aparecen motivos finales diferentes (fig. 7). De acuerdo con la definición según la cual la simetría se manifiesta como la repetición regular de lo igual, se trata también en estos casos de un resto de simetría, que en lo sucesivo se llamará "simetría parcial".

Todo conjunto de cuerpos que tienen órganos de simetría iguales en clase, cantidad y posición, representa una clase de simetría. Con los 14 órganos de simetría descritos ya están definidas 14 clases de simetría, esto es, aquellas caracterizadas por *una* sola operación de superposición como señal de simetría. Pero la gran mayoría de las clases está caracterizada por la combinación de dos o más operaciones

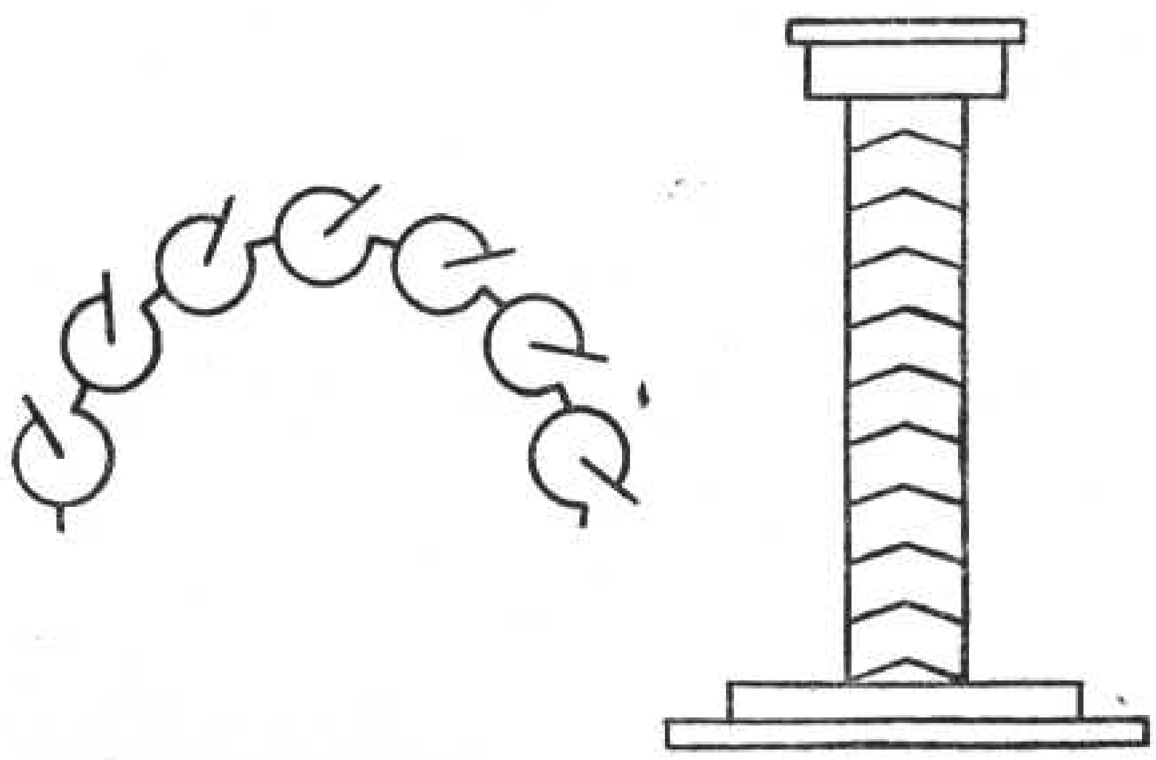


FIG. 7. *Ejemplo de simetría parcial.*

de superposición de igual o diferente clase. La clase de simetría de un cubo se describe por:

Rotación: a) alrededor de tres ejes de rotación de orden 4 perpendiculares a las caras del cubo y que pasan por sus centros; *b)* alrededor de cuatro ejes de rotación de orden 3 que unen los vértices diagonalmente opuestos; *c)* alrededor de seis ejes de orden 2 que pasan por el punto medio de las aristas diagonalmente opuestas;

Reflexión especular: a) en tres planos de reflexión perpendiculares entre sí que dividen las caras del cubo en mitades y son perpendiculares; *b)* en 6 planos de reflexión perpendiculares entre sí y que dividen las caras del cubo en mitades en dirección de sus diagonales; como consecuencia hay una *inversión* (reflexión rotatoria) en un centro de simetría que corresponde al centro del cubo.

Aunque en principio hay infinitas clases de simetría, no es posible ligar arbitrariamente todos los órganos de simetría. Por un lado, determinadas combinaciones o acoplamientos de operaciones de superposición excluyen la presencia de otras operaciones de superposición. Por ejemplo: la extensión excluye la traslación pura; la traslación en dos o tres direcciones espaciales excluye ejes de rotación de orden 5 ó mayor que 6. Por otra parte, las combinaciones y el acoplamiento de operaciones de superposición muy a menudo llevan, como consecuencia, a la aparición de otros órganos de simetría bien determinados. Por ejemplo: la traslación pura acompaña necesariamente a la reflexión traslatoria y al movimiento helicoidal, la extensión traslatoria a la extensión helicoidal y a la extensión reflejo-traslatoria; dos ejes de rotación de orden 2 perpendiculares entre sí implican un tercero, que a su vez es perpendicular a los dos primeros; dos planos de reflexión o dos ejes de abatimiento que forman entre sí un ángulo de 120° implican un tercero, bisector de ese ángulo; etcétera.

3. Clases de simetría. La clase y la cantidad de los órganos de simetría y la posibilidad de su ubicación, dada de antemano por la clase de los cuerpos, determinan el *plan de construcción de la simetría* de las respectivas formas de los cuerpos.

El desarrollo subsiguiente de nuestra sistemática se ordena de acuerdo con el plan de construcción, partiendo de la configuración de los cuerpos. *El sistema de los cuerpos simétricos* así fundamentado está representado en la tabla 2 (ver págs. 24 y 25). Cada agrupación de cuerpos está determinada por sus órganos característicos, a saber: ejes de rotación (R), ejes de abatimiento ($K = {}_1R_2$), planos de reflexión especular (S), ejes de traslación (T), puntos de extensión (E) y ejes de extensión (TE). Además están indicadas las direcciones espaciales de los ejes de rotación, abatimiento, traslación y extensión, en tanto se señala, para diferenciarlos, si son de una sola dirección, de varias direcciones pertenecientes a un plano, o de varias direcciones pertenecientes a varios planos del espacio. Con esto queda también definida la ubicación de los planos de reflexión especular y la dirección de la extensión desde el punto de extensión, como también la ubicación de todos los demás órganos de simetría acoplados.

En detalle, se observa lo siguiente:

a) Cuerpos isométricos finitos

α. *Cuerpos poligonales.* Los cuerpos isométricos finitos más simples son los llamados "cuerpos poligonales". En lo que sigue, serán extensamente tratados y analizados hasta en la clase y cantidad de sus órganos de simetría, porque son la base de todas las formas simétricas de los cuerpos.

En los polígonos regulares, a los cuales están referidos los cuerpos poligonales, pueden aparecer las siguientes operaciones de superposición:

Identidad (i).

Rotación alrededor de un eje perpendicular al centro del polígono n-vértice (de orden n) i.e. rotación céntrica r_n. La representación de un motivo en el polígono puede ocurrir (n — 1) veces. Además de la rotación r_n, existen todas las rotaciones alrededor del mismo eje cuyo orden es divisor de n (por ejemplo en el 15-gono, además de r_{15}, r_5 y r_3).

Reflexión especular en un plano paralelo al plano del polígono (s_P).

Reflexiones rotatorias (rs_P) como acoplamiento de todas las rotaciones céntricas de orden par con s_P.

Reflexiones especulares:

n par:

a) a través de 2 vértices opuestos (s_V);

b) a través de 2 lados opuestos (s_L);

n impar:

a través del vértice y del punto medio del lado opuesto (s_{VL});

Abatimientos:

n par:

a) alrededor de 2 vértices opuestos (k_V);

b) alrededor de 2 lados opuestos (k_L);

n impar:

alrededor del vértice y del punto medio del lado opuesto (k_{VL}).

Todos los cuerpos a los cuales corresponden estas y solamente estas operaciones de superposición, pertenecen, por su simetría, a los polígonos regulares. Por consiguiente, los denominamos *cuerpos poligonales.*

El primer grupo de polígonos es el grupo de los "unilaterales", es decir, aquellos cuyo "reverso" no influye sobre la simetría del cuerpo (por ejemplo representaciones planas unilaterales). En ellos están excluidas, de antemano, las operaciones de superposición arriba mencionadas, la reflexión especular en un plano s_P, las reflexiones rotatorias rs_P acopladas con s_P y los abatimientos k_V, k_L, o sea k_{VL} alrededor de vértices y lados. El polígono más simple de este grupo es el *univértice unilateral* que se obtiene reduciendo el número de vértices del polígono a uno. Sólo pueden aparecer en este univértice la identidad (i) y una reflexión especular (s_V) (fig. 8*a*); por consiguiente los cuerpos que presentan esta simetría, como por ejem-

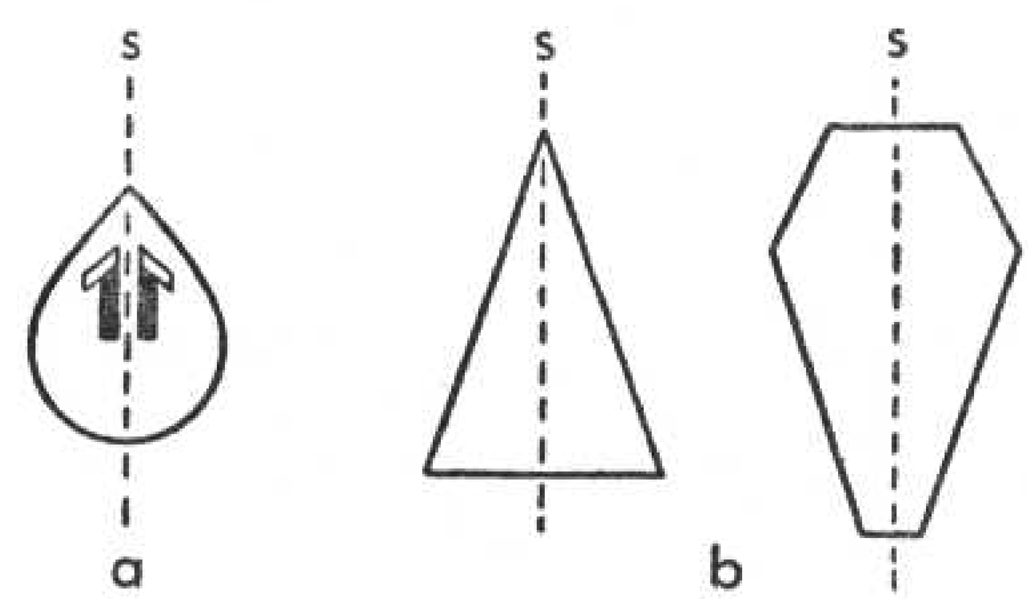


FIG. 8. *a) univértice, b) cuerpos univértices.*

plo, los de la figura 8*b*, se denominan cuerpos univértices unilaterales.

En los polígonos unilaterales con mayor número de vértices se agregan a la identidad *i* y a la reflexión especular s_V otras reflexiones especulares y rotaciones céntricas; para ellos son característicos los planos de reflexión especular y un eje de rotación en *una* dirección espacial. El *cuadrivértice regular unilateral* (cuadrado) tiene, según esto, los siguientes órganos de simetría:

Identidad I
Ejes de rotación céntrico de orden
 4 y 2 .... R y K
2 planos de reflexión especular a
 través de 2 vértices opuestos $2S_V$
2 planos de reflexión especular a
 través de 2 lados opuestos ... $2S_L$

La posición relativa de los órganos de simetría se observa en la figura 9*a*. Estos siete órganos de simetría producen las ocho ($= 2n$) reproducciones de un motivo dentro del cuadrado, que aparecen en la figura 9*b* y se originan en una disposición adecuada del motivo asimétrico ◀

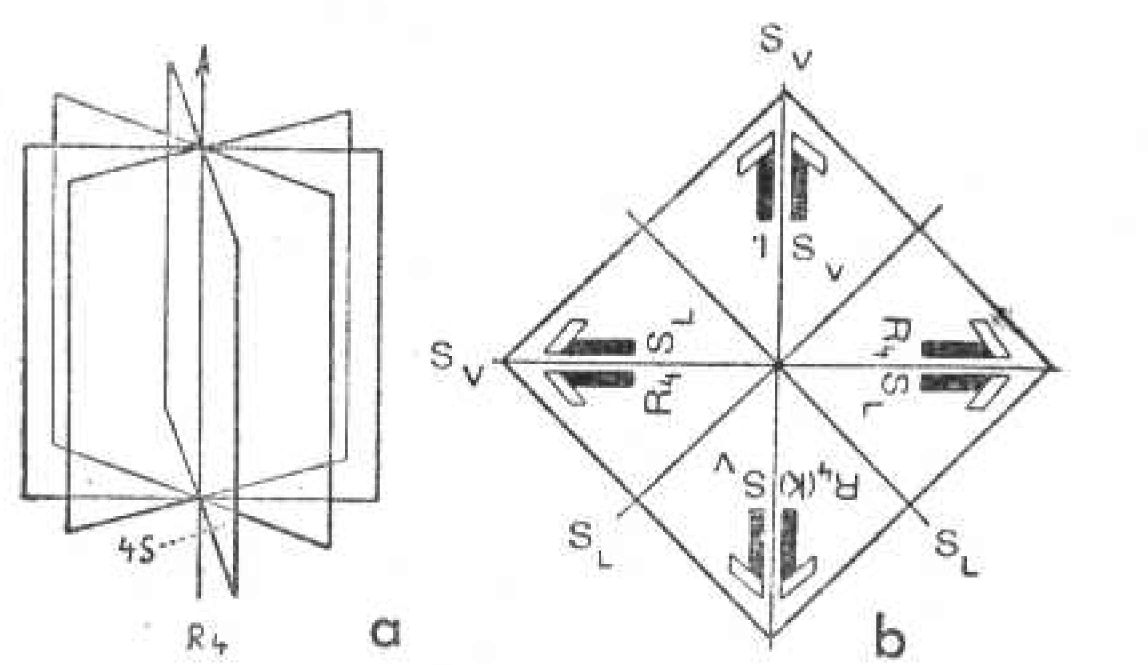


FIG. 9. *Órganos de simetría y disposición del motivo en el cuadrivértice regular unilateral.*

La simetría total (holoedría) del cuadrado se puede subdividir en diferentes clases de simetría independientes (ver página 26).

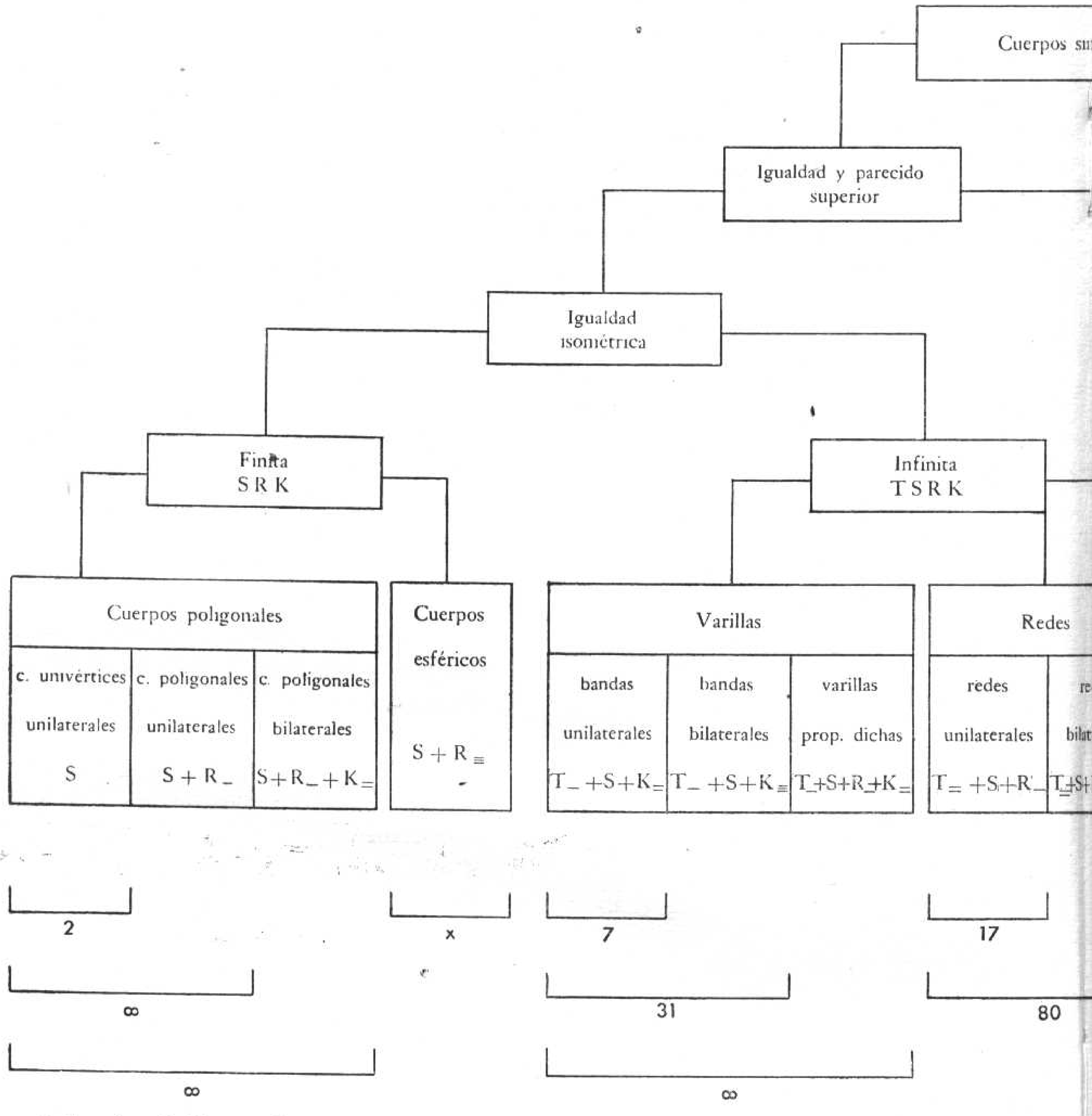
Estas ocho clases de simetría son todas realizables en el cuadrivértice unilateral. Una de ellas (1.) es la holoedría [1] ("orden 8"), o sea la que posee el número completo de operaciones de superposición; tres (2., 3. y 4.) poseen cuatro, es decir, la mitad de las operaciones de superposición posibles ("orden 4") y, por consiguiente, se llaman hemiedrías; tres (5., 6. y 7.) poseen dos, o sea, la cuarta parte de las operaciones de superposición posibles ("orden 4") y se llaman, en consecuencia, tetartoedrías; una (8.) tiene una sola, es decir, la octava parte de todas las operaciones de superposición posibles ("orden 1"), es la octoedría.

Las figuras enseñan que de las clases de simetría sólo tres (1., 2. y 3.) aprovechan enteramente las posibilidades del cuadrado, o sea, aquellas tres en las cuales aparecen ocupadas todas las esquinas con motivos. Las tres siguientes (4., 5. y 6.) no pertenecen solamente al cuadrado, sino al mismo tiempo al bivértice regular; las dos últimas (7. y 8.) son las clases de simetría I e $I + S_V$, ya observadas en el univértice. Por consiguiente, el cuadrado abarca ya una familia de polígonos regulares: el cuadri, bi y univértice, que son

[1] Estas denominaciones provienen de la mineralogía. Véase, por ejemplo P. NIGGLI, *Lehrbuch der Mineralogie und Kristallchemie*, loc. cit., 1ª parte, página 71.

EL SISTEMA DE LOS CUERPOS SIMÉTRICOS

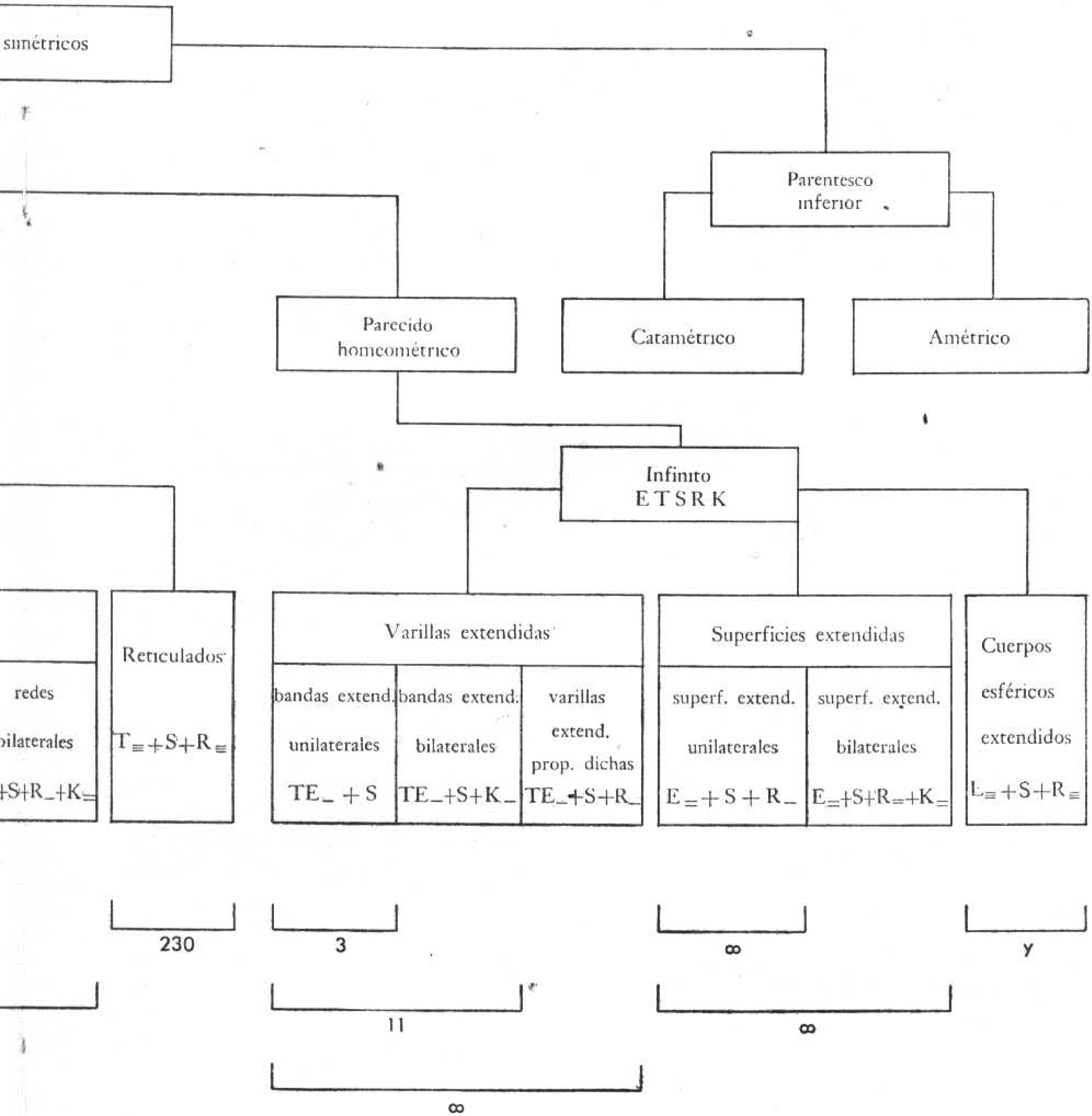
Tabla 2



S plano de reflexión especular
R eje de rotación
K eje de abatimiento

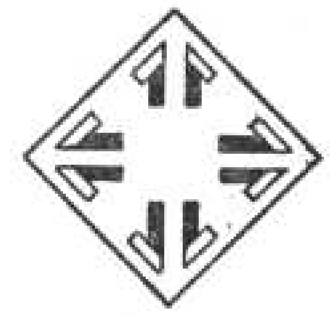
T eje de traslación
E punto de extensión
TE eje de extensión

— en una dirección
= en el plano
≡ en el espacio

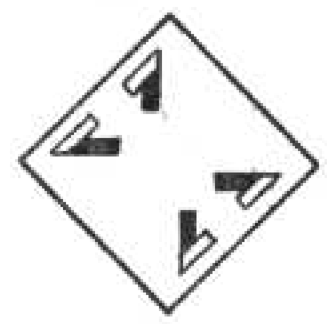

simétricos
Parentesco inferior
Parecido homeométrico
Catamétrico
Amétrico
Infinito ETSRK
Reticulados
$T_{\equiv}+S+R_{\equiv}$
redes
bilaterales
$+S+R_{-}+K_{=}$
Varillas extendidas
bandas extend. unilaterales
$TE_{-}+S$
bandas extend. bilaterales
$TE_{-}+S+K_{-}$
varillas extend. prop. dichas
$TE_{-}+S+R_{-}$
Superficies extendidas
superf. extend. unilaterales
$E_{=}+S+R_{-}$
superf. extend. bilaterales
$E_{=}+S+R_{=}+K_{=}$
Cuerpos esféricos extendidos
$E_{\equiv}+S+R_{\equiv}$
230
3
∞
y
11
∞
∞

aquellos polígonos cuyo número de vértices es divisor de 4. En general, designaremos como familia n-vértice a todos los

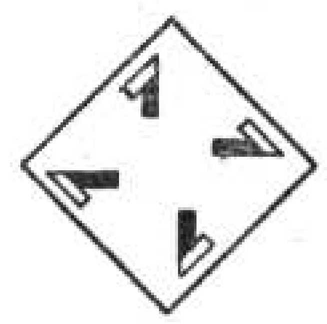
1. $I + R_4 + K + 2\,S_V + 2\,S_L$
   8 motivos, o sea, 8 operaciones de superposición



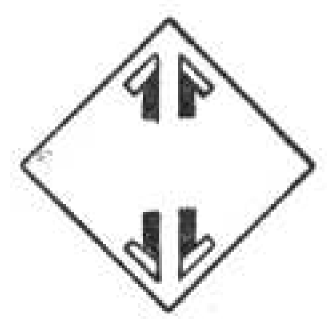
2. $I + K + 2\,S_L$
   4 motivos, o sea, 4 operaciones de superposición



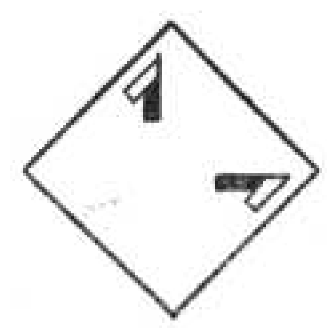
3. $I + R_4 + K$
   4 motivos, o sea, 4 operaciones de superposición



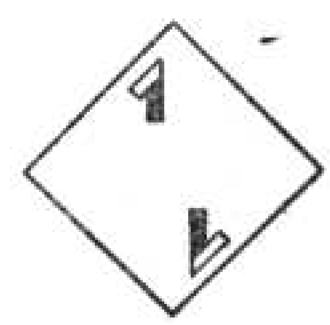
4. $I + K + 2\,S_V$
   4 motivos, o sea, 4 operaciones de superposición



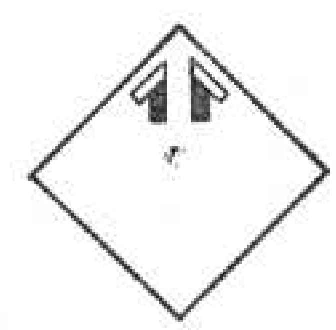
5. $I + S_L$
   2 motivos, o sea, 2 operaciones de superposición



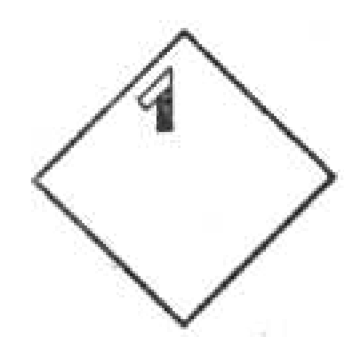
6. $I + K$
   2 motivos, o sea, 2 operaciones de superposición



7. $I + S_V$
   2 motivos, o sea, 2 operaciones de superposición



8. I
   1 motivo, o sea, 1 operación de superposición

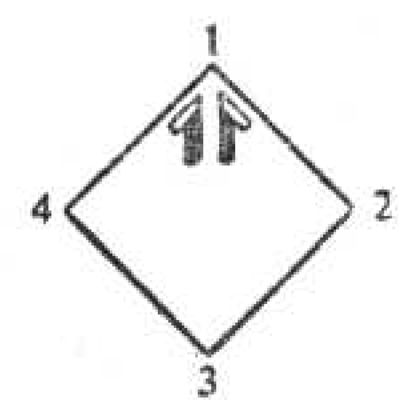


polígonos abarcados por un n-vértice regular y cuyo número de vértices es divisor de n.

El número de clases de simetría de la familia del cuadrivértice regular está determinado por el número de posibilidades de rotación (incluyendo la identidad) y por el número de posibilidades de reflexión y de combinaciones de rotación y reflexión, siendo el número de posibilidades de rotación en el cuadrivértice regular igual al número de divisores ($t_n = 3$) del número de vértices ($n = 4$), y el número de posibilidades de reflexión y de combinaciones de rotación y reflexión igual a la suma del ya citado número de divisores ($t_n = 3$) y del número de divisores ($t_{n/2} = 2$) de la semisuma de los vértices ($n/2 = 2$). En total, se obtiene para el número de clases de simetría: $2t_n + t_{n/2} = 6 + 2 = 8$ posibilidades[1]. Los órganos de simetría son n planos de re-

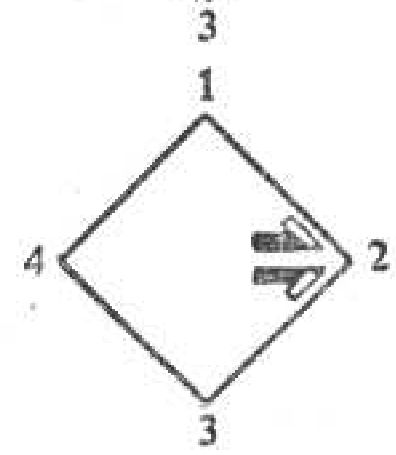
[1] Si se fijan los vértices del polígono, es decir, si se los numera, se distinguen, además de las clases de simetría que solamente interesan aquí, otras disposiciones de los órganos de simetría; p. ej.,

un plano de reflexión especular a través de los vértices 1 y 3



se distingue de

un plano a través de los vértices 2 y 4.



flexión especular t_n (incluyendo la identidad) rotaciones.

Lo que se expuso aquí para el cuadrivértice regular unilateral, vale en general para las familias de los polígonos regulares unilaterales, es decir, para los cuerpos poligonales unilaterales [1]:

El número de operaciones de superposición posibles es $2n$, el número de órganos de simetría $n + t_n$, y el número de clases de simetría $2t_n + t_{n/2}$.

Una ley regular análoga se encuentra también en los *cuerpos poligonales bilaterales,* es decir, en aquellos donde "el reverso" también determina la simetría (figura 10). En ellos aparecen todas las operaciones de superposición antes citadas (pág. 21), además del eje de rotación céntrico. Para los cuerpos poligonales bilaterales de orden mayor de dos, son característicos los ejes de abatimiento en un plano perpendicular al eje de rotación.

El univértice bilateral tiene, además del plano de reflexión especular ya observado

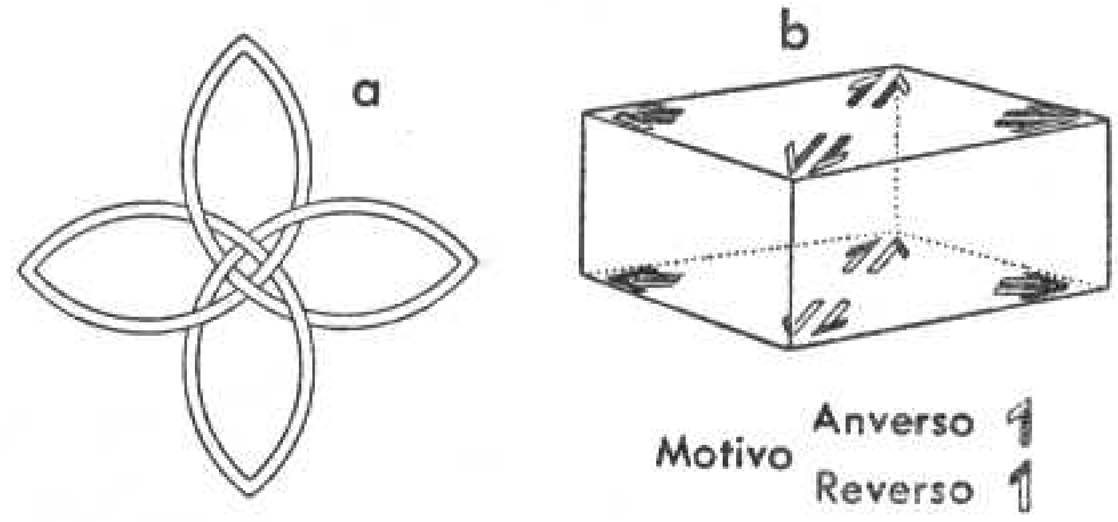


FIG. 10. *Cuadrivértice regular bilateral y disposición del motivo.*

en el univértice unilateral, un eje de abatimiento K_V y el plano de reflexión especular S_P; la disposición de sus órganos de simetría está representada en la figura 11.

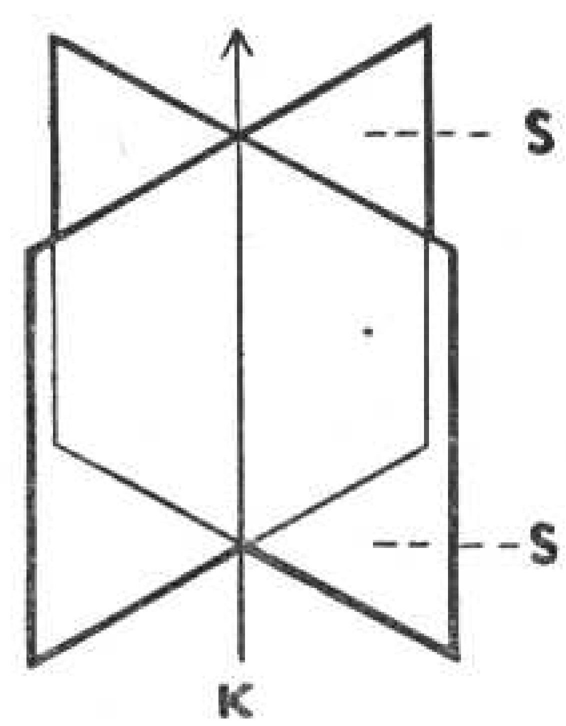


FIG. 11. *Órganos de simetría del bivértice unilateral, o sea, del univértice bilateral.*

Ésta corresponde exactamente a la del bivértice unilateral, por eso se dice que el univértice bilateral y el bivértice unilateral son *isomorfos* con respecto a su simetría.

En el *cuerpo poligonal bilateral* la cantidad de operaciones de superposición po-

Estas posibilidades se estudian en la teoría de los grupos. Si se las quiere abarcar como "subgrupos" en una ampliación de las fórmulas $2\,t_n + t_{n/2}$ y $5\,t_n + 6\,t_{n/2}$, entonces hay que tener presente que el número de ejes o planos nuevos, que así aparecen, depende del número de vértices del polígono. Por consiguiente, el número total de subgrupos no es solamente función del número de divisores, sino también función del número de vértices n; en el univértice unilateral el número de subgrupos es $t_n + n + n/2 + n/3 + n/4 \ldots$ para todos los números enteros n/x. Más detalles se darán en una exposición sistemática total. Los fundamentos de la teoría de los grupos se encuentran, por ejemplo, en A. SPEISER, *Theorie der Gruppen endlicher Ordnung,* Berlín, 1927, 2ª edición.

[1] El subrayado es nuestro. (N. del T.)

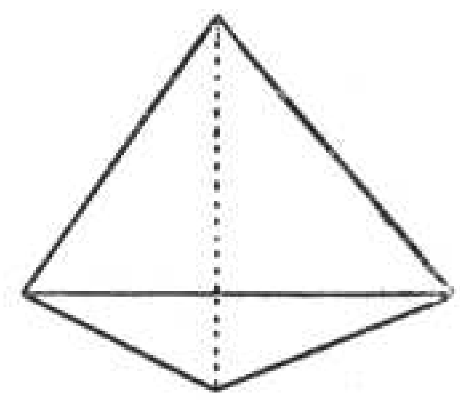
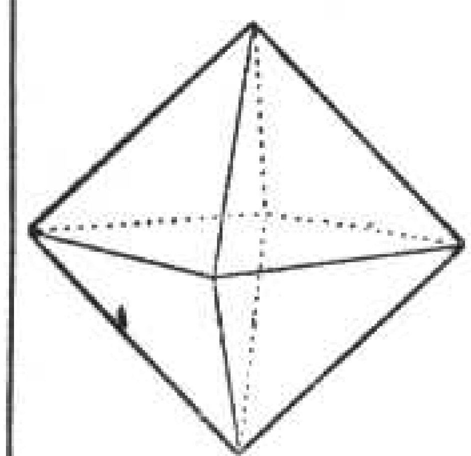
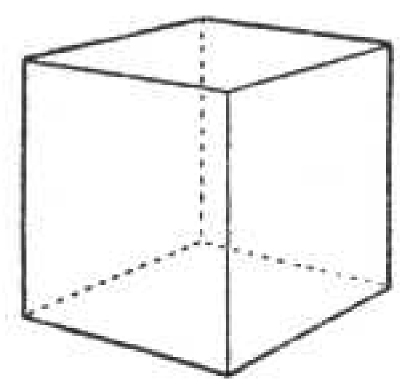
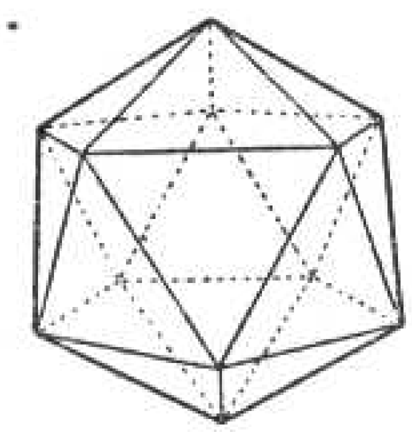
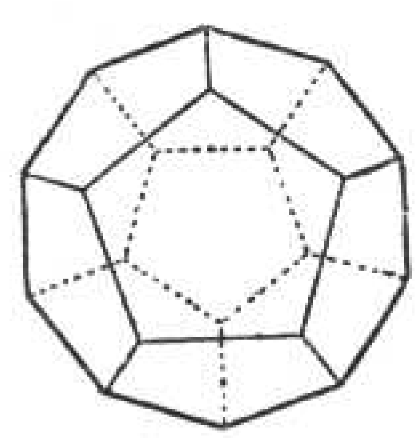
sibles aumenta a $4n$. Como se demuestra en la figura 10*b*, en el cuadrivértice regular ya no hay que ocupar sólo cuatro, sino ocho lugares con motivos; por consiguiente, crece la cantidad de clases de simetría a $5t_n + 6t_{n/2}$ la de los órganos de simetría a $2n + t + t_{n/2} + 1$. A la familia de un n-vértice regular bilateral pertenecen todos los polígonos cuyo número de vértices es divisor de n, inclusive los unilaterales. Como el número de vértices puede variar de 1 a ∞ hay, en total, infinitos cuerpos poligonales. Si el número de vértices tiende a ∞, el polígono se transforma en una circunferencia uni o bien bilateral, que es el polígono simétrico máximo. En la tabla 3 se presentan algunos polígonos con sus correspondientes propiedades de simetría.

Nº DE VÉRTICES	ÓRGANOS DE SIMETRÍA		OPERACIONES DE SUPERPOSICIÓN		CLASES DE SIMETRÍA		Nº DE DIVISORES	
	n-vért. 1-lat.	n-vért. 2-lat.	n-vért. 1-lat.	n-vért. 2-lat.	n-vért. 1-lat.	n-vért. 2-lat.	de n	de $n/2$
n	$n + t_n$	$2_n + t_n + t_{n/2} + 1$	2_n	4_n	$2t_n + t_{n/2}$	$5t_n + 6t_{n/2}$	t_n	$t_{n/2}$
1	2	4	2	4	2	5	1	–
2	4	8	4	8	5	16	2	1
3	5	9	6	12	4	10	2	–
4	7	14	8	16	8	27	3	2
5	7	13	10	20	4	10	2	–
6	10	19	12	24	10	32	4	2
7	9	17	14	28	4	10	2	–
8	12	24	16	32	11	38	4	3
9	12	22	18	36	6	15	3	–
10	14	27	20	40	10	32	4	2

TABLA 3. *Simetría de los cuerpos poligonales uni y bilaterales.*

β. *Cuerpos esféricos.* Si los ejes de rotación están dispuestos en más de dos direcciones no coplanares ("en el espacio"), se llega a las formas isométricas finitas denominadas cuerpos esféricos. Al ser holoedrías, tienen las posibilidades de simetría de los *cuerpos platónicos* (ver pág. 29).

Resulta simetría esférica al tender el número de vértices a ∞, esto es, que el número de operaciones de superposición es ∞. El cubo y el octaedro, al igual que el icosaedro y el dodecaedro, pertenecen a la misma clase de simetría, es decir, sus órganos de simetría son iguales en clase, número y posición. Su forma exterior distinta se debe comprender de la manera siguiente: donde en uno de los dos cuerpos se encuentra un vértice, el otro tiene el centro de una cara, de modo que se puede

	OPERACIONES DE SUPERPOSICIÓN	VÉRTICES	CARAS	ARISTAS	
Tetraedro	24	4	4	6	
Octaedro	48	6	8	12	
Cubo	48	8	6	12	
Icosaedro	120	12	20	30	
Dodecaedro	120	20	12	30	

inscribir el uno sobre el otro. El tetraedro se contiene a sí mismo. Más ejemplos de cuerpos esféricos deducibles de los cuerpos platónicos se encuentran en los 13 cuerpos arquimedianos o en los 3 cuerpos de Kepler.

En el grupo de los cuerpos esféricos hay un número, finito y calculable, de clases de simetría que está dado de antemano por la forma de los cuerpos platónicos, que responden a las posibilidades finitas de rotación alrededor de ejes de orden determinado con posición determinada en el espacio.

b) Cuerpos isométricos infinitos

α. *Bandas.* En los cuerpos isométricos infinitos más simples, las *bandas unilaterales,* hay tres condiciones que determinan la elección de los órganos de simetría:

1. Infinitud en una dirección del plano, existiendo limitación en la otra. Implica una traslación en una y sólo en una dirección.

2. "Unilateralidad", pues no permite abatimientos alrededor del eje longitudinal ni transversal de la cinta, ni tampoco reflexión especular en el plano del papel.

3. El desarrollo lineal (ya que el eje longitudinal es una recta) posibilita rotaciones de 180° (abatimientos) alrededor de ejes perpendiculares al eje longitudinal y ejes perpendiculares al plano de la banda (ejes transversales), y reflexiones especulares solamente a lo largo del eje longitudinal (S_L) o a lo largo del eje tranversal (S_Q).

La rotación y las reflexiones mencionadas coinciden exactamente en cantidad, clase y posición con las de la familia del univértice bilateral (ver fig. 11). Por consiguiente, si se considera la identidad en forma análoga a la traslación, una parte de las bandas unilaterales es isomorfa con las familias del univértice bilateral (o sea, con la familia del bivértice unilateral; ver página 16). En las bandas unilaterales, a esas posibilidades de simetría hay que agregar, como consecuencia de la traslación, el acoplamiento de una traslación y una reflexión especular, la reflexión traslatoria a lo largo del eje de reflexión traslatoria (TS_L), de manera tal que a los 5 órganos de simetría correspondan las clases de simetría especificadas en la página 32.

En las bandas isométricas unilaterales hay, pues, dos holoedrías con cuatro operaciones de superposición, cuatro hemiedrías con dos operaciones de superposición y una tetartoedría con una operación de superposición, las cuales suman 7 clases de simetría.

Si el "reverso" de la banda también influye sobre la simetría, entonces la banda unilateral se amplía resultando la *banda bilateral.* Si la banda unilateral presentaba un solo eje de abatimiento en una dirección, la bilateral tiene ahora ejes de abatimiento en tres direcciones. Una parte de las bandas bilaterales es isomorfa respecto de la familia del bivértice bilateral; como consecuencia de la simetría de traslación se agregan a las posibilidades de simetría de esta familia el acoplamiento de una traslación y una reflexión especular (reflexión traslatoria) ya observado en la banda unilateral, como también el acoplamiento de una traslación y una rotación (movimiento helicoidal). La cantidad de órganos de simetría de la banda bilateral holoédrica es 11, y 31 es el número de clases de simetría de la familia de las bandas [1]. La figura 12 da un ejemplo de holoedría.

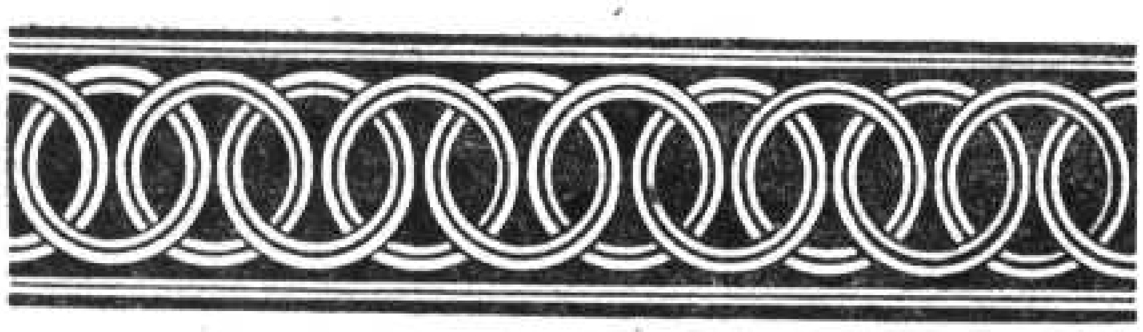


FIG. 12. *Banda ornamental bilateral.*

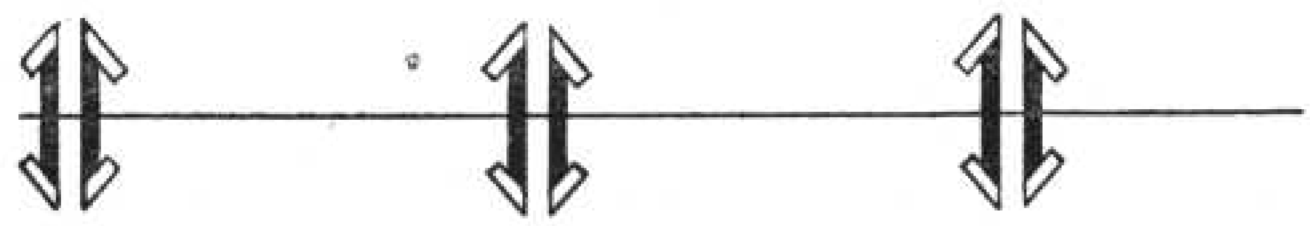
β. *Varillas.* Hay que comprender el isomorfismo del univértice bilateral y de la banda unilateral, como también el del bivértice bilateral y el de la banda bilateral, de tal manera que en la banda unilateral aparezcan multiplicados traslatoriamente univértices bilaterales, y en la banda bilateral, bivértices bilaterales.

En idéntica analogía, es posible disponer también los cuerpos poligonales de orden mayor, por medio de la traslación en bandas, o mejor dicho, en *varillas.* Las varillas pueden tener, además de traslación en una dirección, ejes de abatimiento en el plano y un eje de rotación que tiene la dirección de traslación. Además de los órganos de simetría de los cuerpos poligonales, cada una de estas varillas tiene n planos de reflexión traslatoria y un eje helicoidal. Si el eje helicoidal es de orden mayor que dos, entonces en el movimiento helicoidal se pueden sobrerrotar tantos vértices como se quiera del n-vértice, de 1 a n, es decir, el ángulo de rotación del movimiento helicoidal (que es el acoplamiento de traslación y rotación) ya no es sólo de $360°/n$, sino de $2 \times 360°/n$, de $3 \times 360°/n \ldots$, de $(n-1) \times 360°/n$. El número de clases de simetría en las varillas es ∞, de acuerdo con la posibilidad de la existencia de ejes de rotación de todos los órdenes. Como en los cuerpos poligonales, también se podría aquí determinar solamente la cantidad de clases de simetría para cada orden del eje de rotación (que tiene la dirección de una traslación) que da simultáneamente la simetría poligonal básica. Correspondientemente, habría que dar una relación que abarcara las clases de simetría de la familia de las varillas en forma análoga a la ecuación arriba mencionada, para las clases de simetría de todas las familias poligonales.

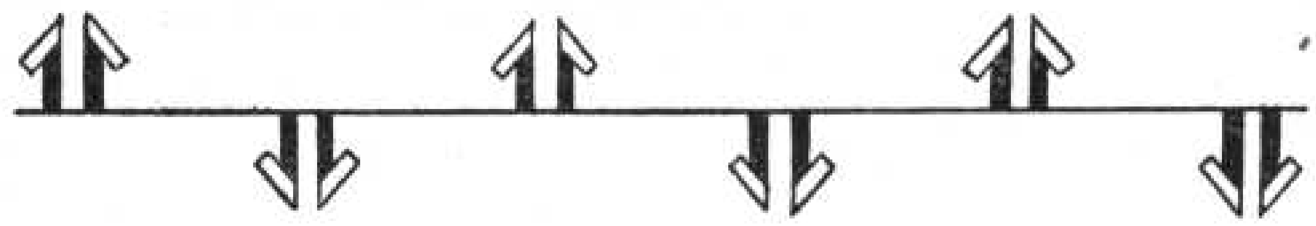
γ. *Redes planas y reticulados espaciales.* Si se trasladan motivos en dos direcciones del mismo plano, se lo cubre con polígonos regulares sin dejar espacios libres. Esto sólo es posible en una red de uni, bi, tri, cuadri, o hexavértices (fig. 13), ya que el ángulo de rotación es divisor de 360°.

[1] Sobre bandas iso y homeométricas, véase K. L. WOLF, D. KUHN y R. WOLFF, *Symmetrie und Polaritaet,* loc. cit., página 214 y siguientes.

1. $T + K + S_L + S_Q$
4 operaciones de superposición.



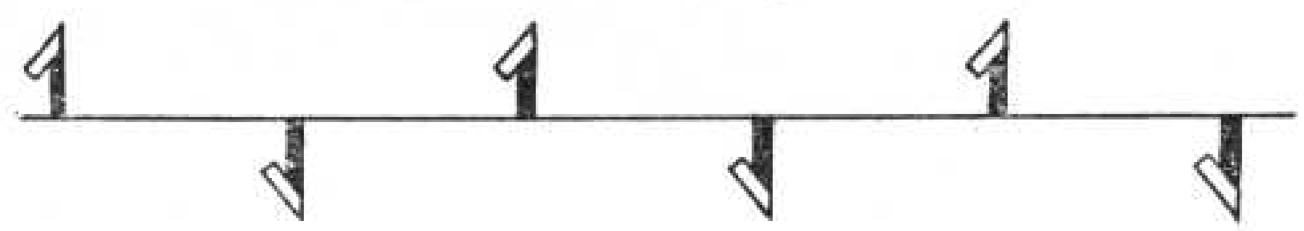
2. $T + K + S_Q + (TS_L)$
4 operaciones de superposición.



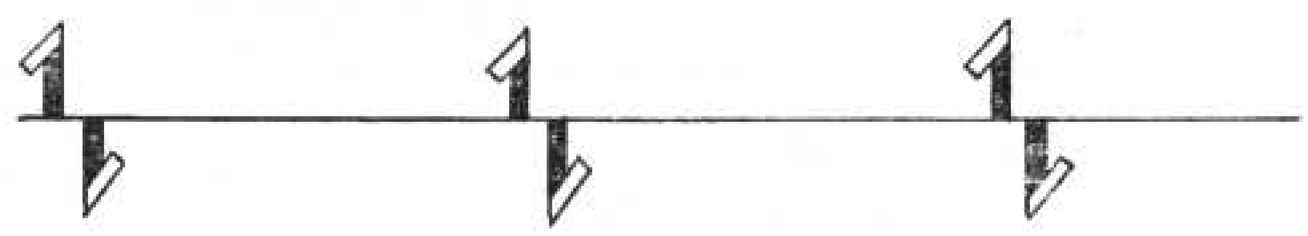
3. $T + S_Q$
2 operaciones de superposición

4. $T + S_L$
2 operaciones de superposición

5. $T + (TS_L)$
2 operaciones de superposición



6. $T + K$
2 operaciones de superposición



7. T
1 operación de superposición

Si los motivos, o sea, los polígonos, son unilaterales, existen ejes de rotación de orden 1, 2, 3, 4 y 6 en una dirección espacial perpendicular al plano de la red.

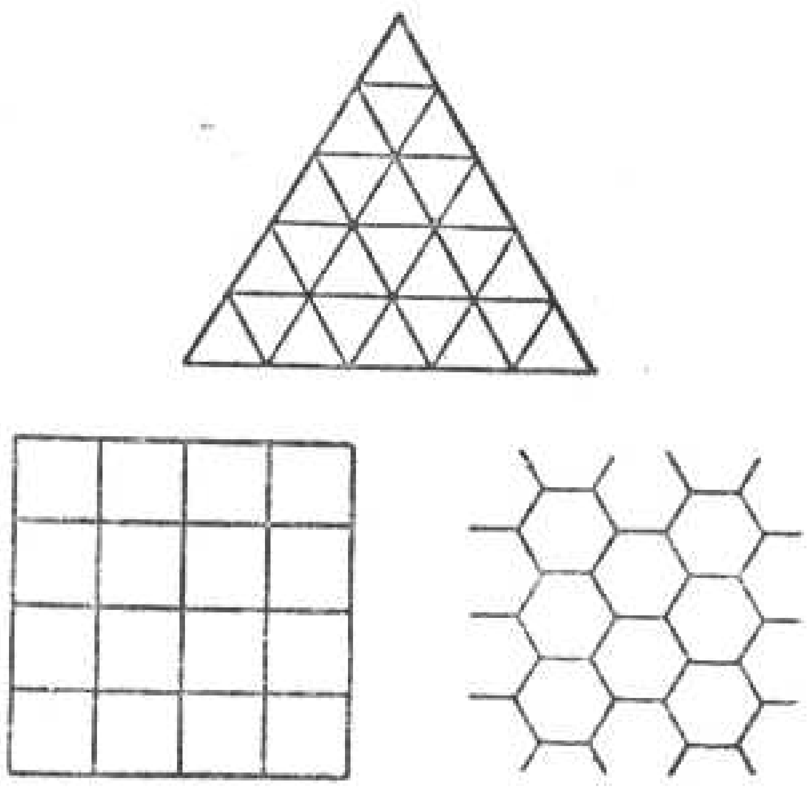


FIG. 13. *Redes poligonales.*

Las redes bilaterales pueden tener, además de estos ejes de rotación, ejes de abatimiento en un plano perpendicular a los ejes de rotación. El número de clases de simetría es, en las redes unilaterales, 17, y en la familia completa de las redes (bi y unilaterales), 80. La figura 14 da un ejemplo de un ornamento plano bilateral.

Si hay traslaciones en tres direcciones, se usan como base de la ordenación simétrica de motivos en el espacio, *cuerpos esféricos* y *cuerpos poligonales* bilaterales, siempre que sea posible juntarlos en un *reticulado espacial* sin dejar espacios libres. Al igual que en la disposición plana de la red, aquí también sólo pueden admitirse ejes de rotación de orden 1, 2, 3, 4 y 6, de manera que se excluyen de los cuerpos esféricos el icosaedro y el dodecaedro, de los cuerpos poligonales el pentágono y todos aquellos que poseen un número de vértices mayor de seis. Los reticulados pueden tener ejes de rotación en las tres direcciones del espacio. La familia de los reticulados espaciales tiene 230 clases de simetría.

c) Cuerpos homeométricos

Como la extensión —al igual que la traslación— es una operación de superposición que repite indefinidamente el motivo, no existen cuerpos homeométricos finitos. Las *bandas extendidas* y las *varillas extendidas homeométricas*, análogas a las bandas y varillas isométricas tienen una extensión traslatoria en una dirección del espacio. Como ejemplo consideremos las bandas extendidas unilaterales. Como la extensión, por principio, siempre está unida a la polaridad, se excluyen los órganos de simetría perpendiculares al eje de la banda, o sea, la re-

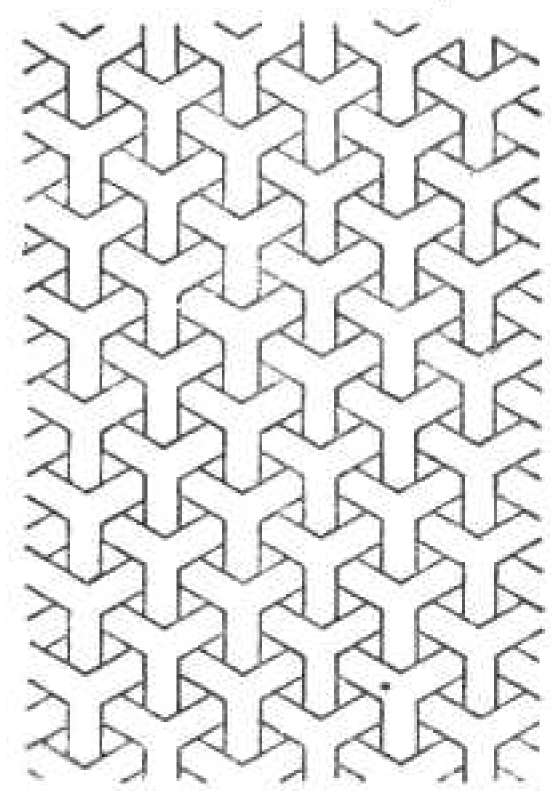
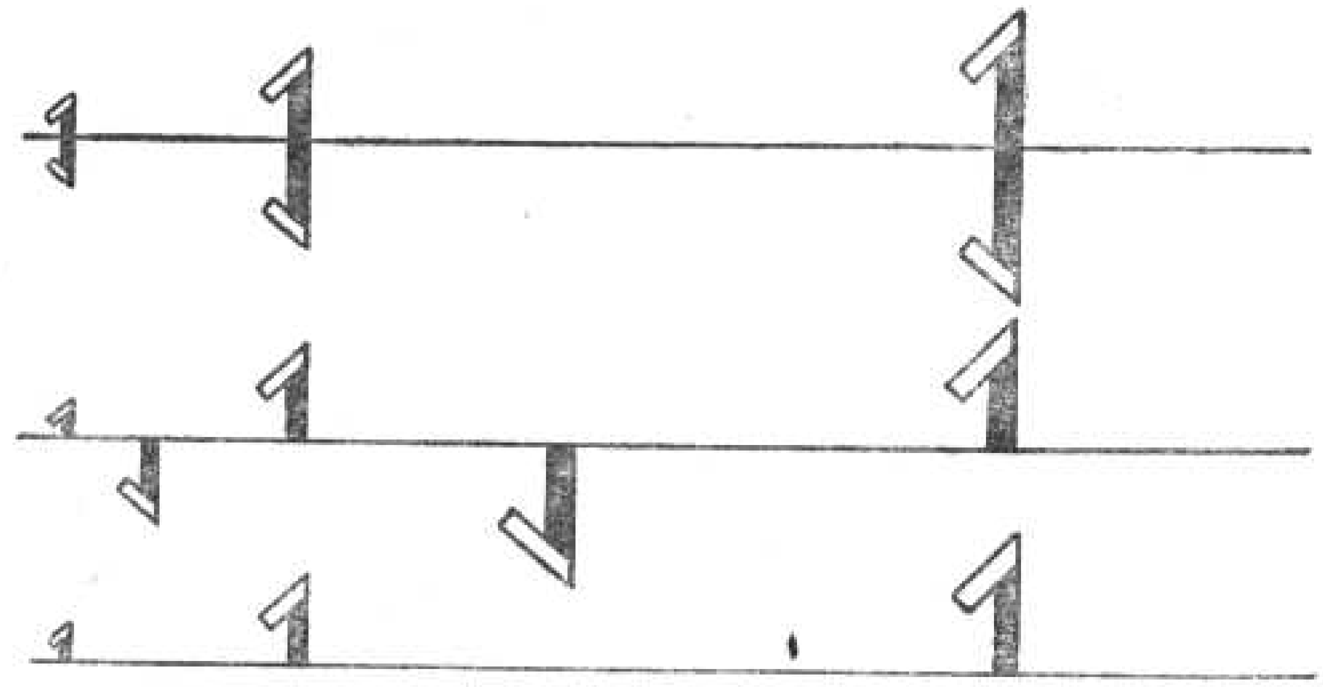


FIG. 14. *Superficie bilateral ornamental.*

flexión especular en ejes transversales y abatimientos alrededor de ejes perpendiculares al eje longitudinal. Por consiguiente, son realizables en las bandas extendidas unilaterales las tres clases de simetría siguientes:

1. $(TE) + S_L$
   2 operaciones de superposición
2. $(TE) + (TES_L)$
   2 operaciones de superposición
3. (TE)
   1 operación de superposición



Estas son dos holoedrías y una hemiedría.

Las once clases de simetría de la familia de las bandas extendidas completas (bi y unilaterales) se dividen en cuatro holoedrías con cuatro operaciones de superposición, seis hemiedrías con dos operaciones de superposición y una tetartoedría con una operación de superposición [1]. La figura 15*a* muestra una banda extendida bilateral originada por una multiplicación del motivo.

Correspondientemente, las *varillas extendidas* son análogas a las varillas isométricas. En ellas se excluyen de nuevo, por no ser compatibles con la extensión, los órganos perpendiculares a la dirección de la extensión. Nuevamente hay ∞ número de clases de varillas extendidas, debido al orden de los ejes de rotación, que va de 1 a ∞. La figura 15*b* muestra una varilla extendida derivada de la banda extendida de la figura 15*a*, con una disposición espacial del motivo.

Las *superficies extendidas* no poseen, a diferencia de las redes con las cuales tienen en común el cubrimiento del plano, ningún carácter de red. Aquí no sigue un polígono inmediatamente al otro, monótonamente, con nuevos centros cada vez,

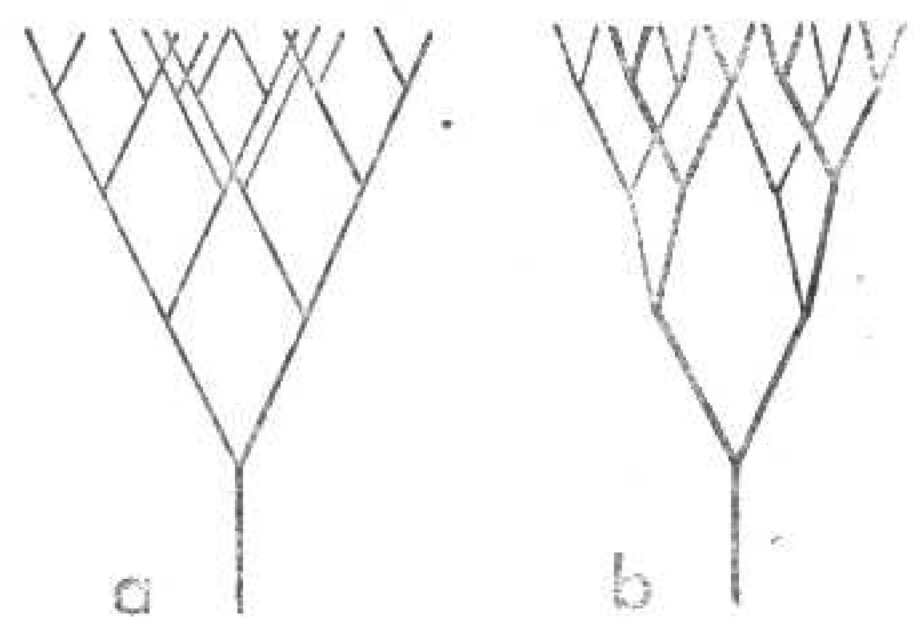


FIG. 15. *a) Banda extendida ornamental.*
b) Varilla extendida ornamental.

sino que la extensión parte del punto de extensión *E*. Por eso las superficies extendidas, en relación con su simetría, son más bien análogas a los polígonos regulares (fig. 16), a pesar de representar cuerpos

[1] Véase nota 1, página 31.

con "rapport" infinito. Las superficies extendidas poseen, por principio, infinitas clases de simetría. Tal como las superficies extendidas se comportan en relación a los cuerpos poligonales, así lo hacen los

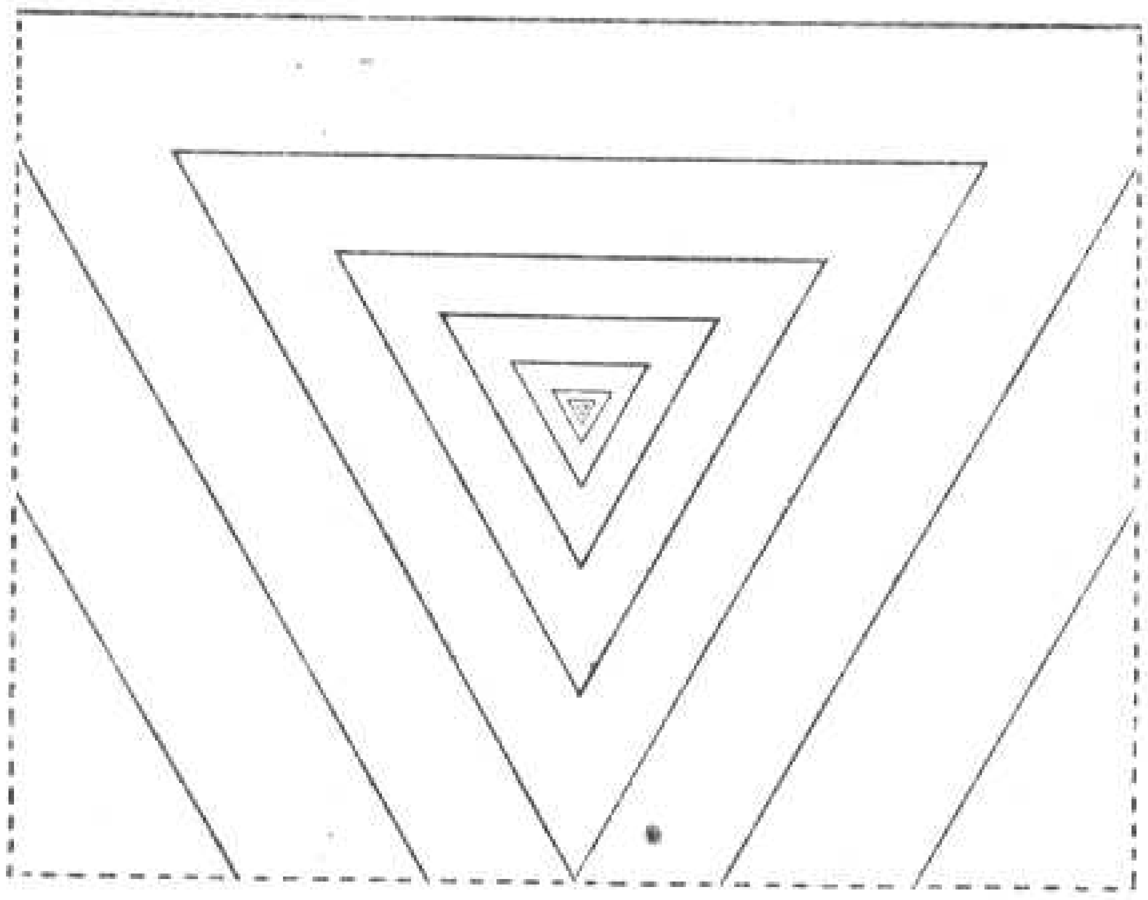


FIG. 16. *Superficie extendida ornamental.*

cuerpos extendidos esféricos en relación con los cuerpos esféricos isométricos. Hay un número finito de cuerpos extendidos esféricos, al igual que los cuerpos esféricos.

d) Cuerpos de simetría inferior

Los cuerpos de simetría inferior se sustraen todavía a una observación sistemática debido a su multiplicidad. Van desde el grupo de los cuerpos catamétricos, pasando por varios escalones hasta el último grupo, el de los cuerpos amétricos, que ya no presentan ninguna simetría.

De modo análogo a la ortosimetría se seguiría articulando la kyrtosimetría. Hay, por ejemplo, kyrtosimetría si se dobla en forma de anillo una banda ornamental bilateral (fig. 17). El plano de reflexión especular que pertenecía primitivamente al plano de la cinta se volvió cilíndrico, es decir, un número infinito de planos de reflexión especular parciales están dispuestos dentro de la circunferencia. La

FIG. 17. *Anillo kyrtosimétrico.*

figura 18 muestra un ejemplo de transformación de ortohomeometría en kyrtosimetría. Los ornamentos se han derivado de los de la figura 15, resultando la bisectriz no ya paralela a la dirección de traslación, sino cada vez más inclinada. Estos esquemas de bifurcación en forma de horquilla aparecen, por ejemplo, en las plantas y se denominan, en la dicotomía, formas "flabellate" y "cruciate" (ver también pág. 52).

Las propiedades de simetría de los cuerpos en el sistema dado se consideran suficientemente determinadas por el número, clase y posición de los órganos de simetría. El aspecto del cuerpo está, sin embargo, determinado, amén de estas propiedades dadas, por el plan de construcción de la simetría y por el carácter sumamente variado del motivo. El amplio campo de las formas de la naturaleza y de la ornamentación en arte y artesanía presenta, correspondientemente, múltiples posibilidades de formación simétrica. Alcance la referencia a las formas artísticas arquitectónicas del edificio entero, desde la planta y las distintas partes hasta la estructura

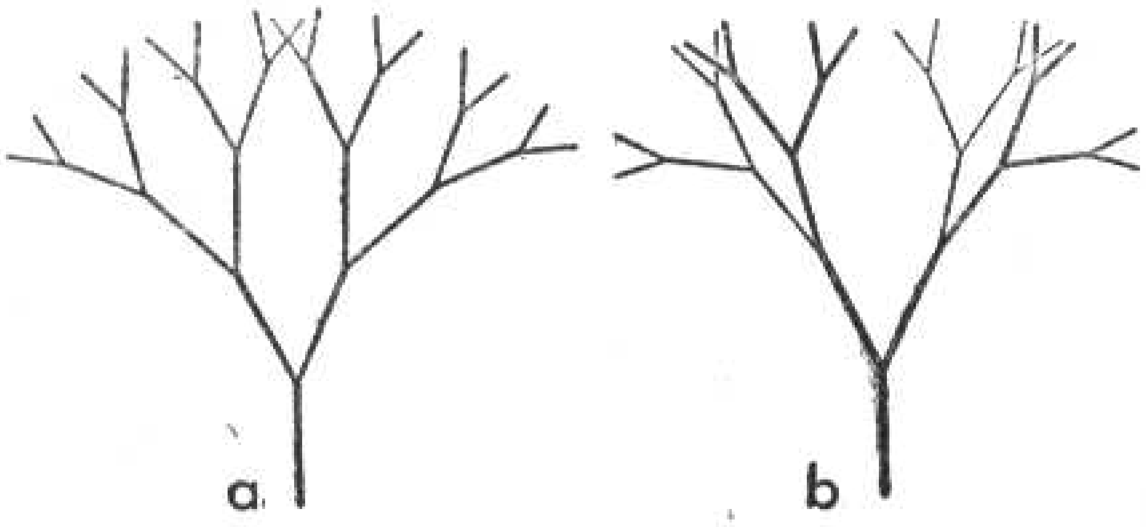


FIG. 18. *a) Banda extendida ornamental kyrtosimétrica. b) Varilla extendida ornamental kyrtosimétrica.*

de mampostería, el recubrimiento del techo y los trabajos decorativos de rosetas, capiteles, estrías, redientes y elementos similares; o a otros ornamentos, en pinturas o esculturas, que aparecen en la representación de hombres, animales o plantas, en vestidos y cabellos, y en dibujos de alfombras, empapelados, ribetes, bordes, rejas y mosaicos. Inclusive cuando —como en las formas del barroco— parece haberse evitado lo simétrico, se percibe todavía la influencia en la evasión consciente de ella [1].

Cada objeto en la naturaleza y en el arte señala determinadas exigencias que obligan, en consecuencia, a una estrecha selección, determinada por la clase del objeto, entre la abundancia de simetrías matemáticamente posibles. Así, por ejemplo: los empapelados, alfombras y rejas sólo pueden tener una simetría en forma de red; los ribetes y bordes, simetría de banda o varilla; las rosetas sólo simetría poligonal. De manera análoga, en las formas naturales los principios implicados en la naturaleza determinan la selección de las clases de simetría realizables en un determinado reino. A la teoría general de la simetría le corresponde el significado de una premorfología para cada ciencia particular, la cual sólo se desarrolla en una morfología al ser aplicada a los diferentes reinos de la naturaleza y del arte, con ciertas restricciones dadas en cada caso por el objeto. El panorama siguiente, sobre las formas de simetría de los cuerpos naturales ilustrará principios de selección de esta clase.

[1] En relación con esto se ha mencionado el "estilo univértice" de los chinos. Confucio dice: "A quien no se esfuerza, yo no le comunico nada, a quien no lucha por la expresión, yo no se la manifiesto. Yo señalo un vértice; si no se contesta con los tres restantes, entonces no caigo en la repetición." El estilo univértice expresa este principio indicando solamente lo esencial y concentrando la disposición espacial en una esquina. "Esto significa que se usa como base de la composición la asimetría, o sea, la simetría polar, que surge del hecho de que haya partes del cuadro ocupadas y libres, completas y vacías. Del mismo modo que toda simetría descansa en sí misma, así todo aquello que quiere elevarse sobre sí mismo, tenderá siempre a la asimetría." Véase W. SPEISER, *Meisterwerke chinesischer Malerei,* Berlín, 1947, Introducción.

LA SIMETRÍA DE LOS CUERPOS NATURALES

En las ciencias naturales y las artes, el concepto de la simetría está ampliamente subrayado por el hecho de que, ante todo, se destacan ciertos casos especiales de simetría —como, por ejemplo, el estrecho dominio de la simetría especular simple— que pasan por eso al primer plano, de tal modo que, finalmente, ciertas clases de simetría son consideradas como el total de la simetría. Pero inclusive en una visión más general, evidentemente sólo se comprendieron aquellas clases de simetría que caen dentro del campo de la ortoisometría [1].

Fue GOETHE acaso el único que concibió que esta versión del concepto de simetría era muy estrecha. Dice en sus escritos morfológicos [2]:

"Con la palabra simetría, en alemán «Ebenmass» [3], se piensa en una relación de partes exteriores que se refieren entre sí en forma agradable; generalmente se usa esa palabra para partes referidas a un centro y que se enfrentan en forma regular. Hemos empleado la palabra *referencia* porque las partes no se observan ni se piensan yuxtapuestas o contrapuestas, sino en forma sucesiva, pero no sólo siguiendo una a la otra idénticamente, permaneciendo siempre absolutamente igua-

[1] En este caso las definiciones de la simetría suelen ser sumamente amplias: "La expresión simetría significa una armonía entre varias partes de un todo. Se encuentra lo simétrico en todos aquellos casos en que lo espiritual se manifiesta en la materia" (A. SPEISER, *Die mathematische Denkweise*, Zürich, 1932), como también muy estrechas: "relación trivial 1:1" (H. FRIEDMANN, *Welt der Formen*, Munich, 1930, pág. 79) o si no tan primitivas como: "Se denomina simétrico a un cuerpo que está constituido por mitades reflexivo-iguales que concuerdan en el sentido de la reflexión especular" (STRASBURGER y otros, *Lehrbuch der Botanik fuer Hochschulen*, Jena, 1947, ediciones 23 y 24, pág. 52).

[2] J. W. VON GOETHE, *Weimarer Sophienausgabe*, 2ª parte, tomo 13, página 60.

[3] *Ebenmass* significa proporción justa. (N. del T.)

les en el mismo nivel, sino resultando algo elevado de lo inferior, algo fuerte de lo débil, algo bello de lo insignificante."

Al observar las formas simétricas en la naturaleza y el arte, hay que tener presente, además, que la simetría nunca se presenta en los objetos absolutamente pura, inclusive sólo aparece a menudo disimulada debido a la diferencia entre idea y presentación. Habrá que tratar de encontrar siempre *tipos*, ya que solamente con ellos se deberá comprender lo igual como indistinguiblemente igual. En el reino de la naturaleza habrá que concebir, por ejemplo, las formas simétricas de los cristales casi directamente en forma tipológica; en los seres vivientes en cambio la influencia modificatoria, especialmente de las condiciones de crecimiento, cubre a menudo tan fuertemente las formas simétricas en las que están basadas, que éstas sólo pueden ser evidenciadas después de profundos estudios, como ya DE CANDOLLE lo expresó con las palabras siguientes [1]: "¿la regularidad que hoy en día todos aceptan como determinante de la forma de los cuerpos inorgánicos, no se podría encontrar también en los cuerpos orgánicos y no deberían dejarse explicar las desviaciones, tan comunes en éstos como en aquéllos, por la realización de causas, que consideradas cada una en sí misma producirían un efecto regular?"

[1] P. DE CANDOLLE, *Von dem Gesetzlichen der Pflanzenbildung*, traducido por J. W. VON GOETHE, *Weimarer Sophienausgabe*, 2ª parte, tomo 7, página 155.

Por cierto que la selección de las formas simétricas posibles en un dominio está determinada, en cada caso, por la índole de aquél, de manera que una generalización simple de un sistema de simetría desarrollado en un dominio especial y que no esté arraigado como el nuestro en la premorfología matemática, de un dominio a otro, sólo es posible con ciertas reservas.

Si HAECKEL, en su estudio de las formas elementales, o FREY, en su observación geométrica de la simetría [2], aplican las condiciones de simetría de los cristales directamente al mundo animal o vegetal, entonces sólo se hace con esto una afirmación periférica para la morfología de los seres vivientes. En este malentendido reside el porqué los zoólogos hayan podido contemplar las consideraciones sobre la simetría de los animales como infructuosas, mientras que ya CUVIER y más tarde JACOBSHAGEN reconocieron en las relaciones de la simetría decisivas características de tipos [3].

[2] E. HAECKEL, *Kunstformen der Natur*, 2ª colección, Leipzig y Viena, 1904, cuaderno suplementario, página 9 y sigs. y tabla de página 49.

A. FREY, "Geometrische Symmetriebetrachtung", *Flora* 1926, t. 120, pág. 87 y siguientes.

[3] W. LUDWIG, "Symmetrieforschung im Tierreich", *Studium Generale*, 1949, t. 2, Nos. 4 y 5, pág. 231. Z. B. K. E. VON BAER, *Lebensgeschichte Cuviers*, editada por L. Stieda, Braunschweig, 1897, pág. 55. E. JACOBSHAGEN, *Zur Reform der allgemeinen vergleichenden Formenlehre der Tiere*, Jena, 1927, pág. 52 y siguientes.

Todas estas dificultades y deficiencias se acrecientan por el hecho de que casi toda disciplina particular usa sus propias, insuficientes, y generalmente inadecuadas denominaciones. Así por ejemplo, en *botánica* todavía es usual aplicar las denominaciones radial, bilateral y dorsiventral [1]. En la construcción de la flor también se dice actinomorfo en lugar de radial y cigomorfo en lugar de dorsiventral. La traslación se caracteriza por el concepto de metamería, con lo que se quiere decir que en la dirección longitudinal del organismo siguen miembros semejantes. En *zoología,* en cambio, "bilateral" significa lo que en botánica quiere decir "dorsiventral", "disimétrico" lo que en las plantas se llama "bilateral"; si hay construcción "radial" se habla de paramería y si es "bilateral" (dorsiventral), de antimería. El cuadro siguiente enseña cómo estas denominaciones pueden ser remplazadas atinadamente por otras provenientes del sistema de los cuerpos simétricos. Si aquí aparecen nombres como "simetría bivértice" etcétera, esto significa que el cuerpo correspondiente posee la simetría de un cuerpo bivértice regular, etcétera.

SIMETRÍA	FORMA DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL	DENOMINACIONES		
		BOTÁNICAS		ZOOLÓGICAS
		generales	para flores	
Simetría poligonal ($n > 2$)	Circular o n-vértice	Radial	Actinomorfo	Radial (paramería)
Simetría bivértice	Elíptico o sea bivértice	Bilateral		Disimétrico
Simetría univértice	"Univértice" (fig. 8)	Dorsiventral	Cigomorfo	Bilateral (antimería)
Simetría de varilla		Metamería		Metamería

La palabra "radial" no especifica el orden del eje de rotación ni la existencia de planos de reflexión especular, de manera que toda la familia poligonal (uni y bilateral), en el momento en que el eje de rotación sea de orden mayor que dos, está comprendida en el concepto de "radial" (fig. 19).

Con "bilateral" se denomina a los cuerpos bivértices, uni y bilaterales, pero únicamente si tienen la holoedría (dos planos de reflexión especular y el eje de rotación de orden dos, fig. 11). "Dorsiventral" es

[1] Sin embargo K. GOEBEL, por ejemplo, define "radial" en la forma siguiente: "Hay desarrollo radial, si un órgano no permite distinguir atrás ni adelante, ni a derecha ni a izquierda, sino que está organizado aproximadamente igual según todos los radios del corte transversal" (véase K. GOEBEL, *Organographie der Pflanzen,* Jena, 1928, 3ª edición, tomo 1, pág. 249 y siguientes).

la única denominación unívoca, ya que para la dorsiventralidad es característico *un* sólo órgano de simetría, un plano de reflexión especular. Por metamería se entiende todo lo que está comprendido en la simetría de la familia de las varillas. Para llegar a conceptos unívocos se recomienda no emplear, con excepción de dorsiventral, estas denominaciones tradicionales y de limitación profesional y remplazarlas por las denominaciones sistemáticas, determinadas y generales.

Las definiciones y la sistemática de los cuerpos simétricos provienen todavía en gran parte del pensamiento matemático, con el punto y el número como principios de articulación del espacio y del tiempo. La esencia de la observación matemática está basada en la suposición de la absoluta igualdad de las figuras en consideración (por ejemplo figuras geométricas o entes algebraicos) [1]. En cambio en la naturaleza no hay dos cosas iguales [2]; al hallazgo de lo igual o parecido, desde el punto de vista del plan de construcción —es decir, de tipos—, se oponen en las formas naturales la gran variedad de los fenómenos individuales, su constante cambio de configuración y su dependencia con el medio. "Que aquello en que la idea es igual pueda parecer igual o parecido en la experiencia, o llegar a parecer desigual y no parecido, en esto está propiamente la vida cambiante de la naturaleza" [3].

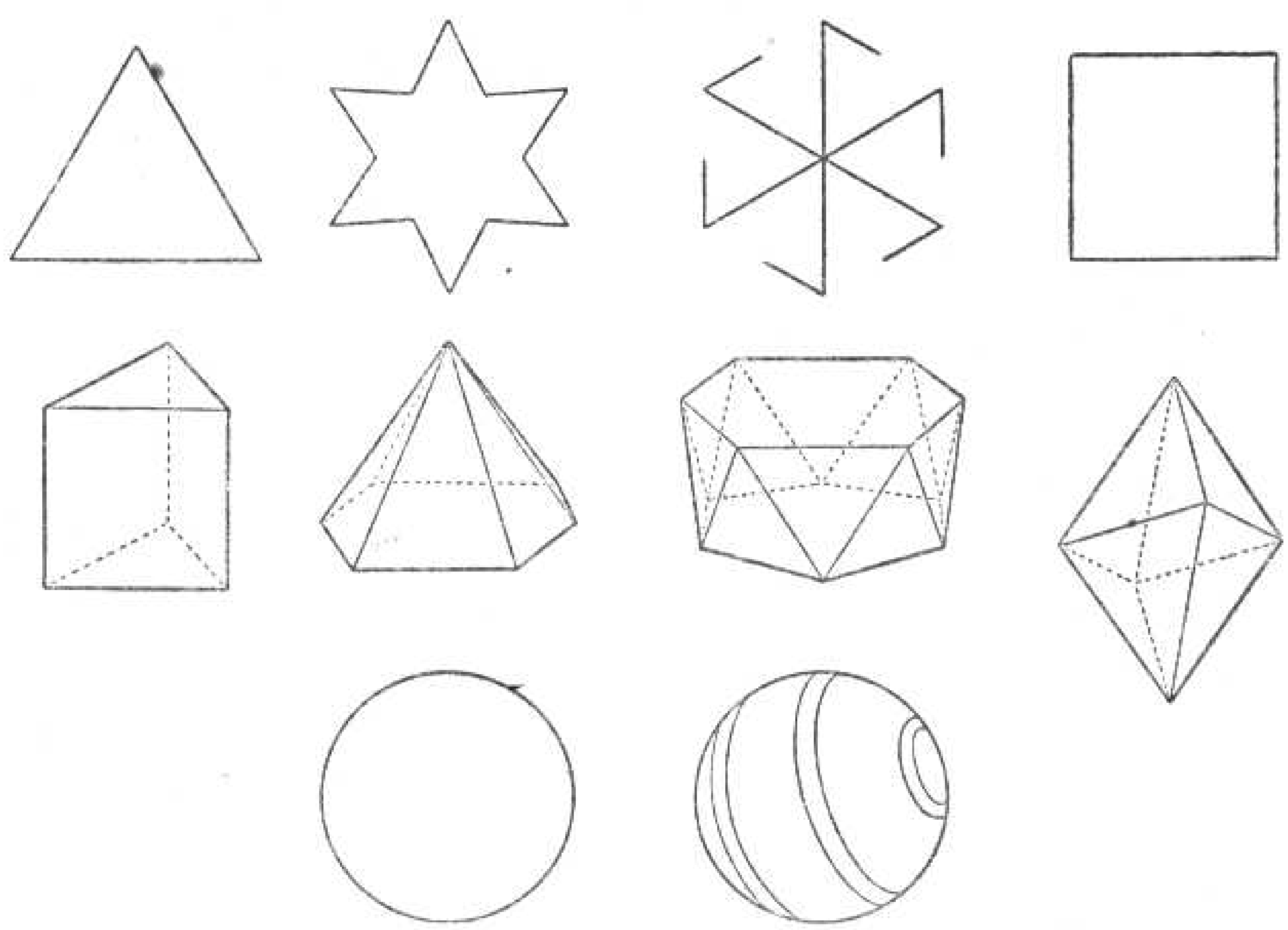


FIG. 19. *Simetría "radial"*.

[1] M. STECK, "Mathematik als Begriff und Gestalt", *Die Gestalt*, Halle, 1942, cuaderno 12, página 12.

[2] Véase, por ejemplo: LEIBNIZ, *Escrito quinto contra Clark.*

[3] J. W. VON GOETHE, *Weimarer Sophienausgabe*, 2ª parte, tomo 6, página 12.

En los diferentes reinos de la naturaleza, a la existencia pura en el espacio y en el tiempo, se superpone una estructura y un desarrollo de determinadas formas, característico para cada reino. La primera formación de nivel superior está dada por el desarrollo de *campos de fuerzas* y *corpúsculos elementales*, la materialización más simple de masa y energía. Sobre este reino se sitúa el de la materia. Su sustancia son *campos de fuerzas* y *corpúsculos*, transformados en *átomos* y *moléculas*, que aparecen asociados, en los estados de combinación visibles, como *gases líquidos* y *sólidos*. Sobre ellos, como sustancia, descansa el reino de los seres vivos. Aquí domina la *vida* (*vegetativa* y *sensitiva*) en la estructuración que subordina las formas de las sustancias creadas desde el punto de vista del organismo, permitiendo así las particularidades de los organismos, como sensibilidad, alimentación, respiración, crecimiento, reproducción y también la muerte y con ella el retorno al dominio de lo inorgánico. Así como la vida presupone la materia y ésta el espacio y el tiempo, lo espiritual que distingue al hombre necesita como sustancia la vida, y con ella todas las formas inferiores mencionadas.

Por consiguiente, la naturaleza aparece en una sucesión escalonada de reinos, cada uno con su forma básica típica [1].

[1] Explicado más ampliamente en TROLL, *Das Virusproblem in ontologischer Sicht*, Wiesbaden, 1951, página 4 y siguientes; véase también: K. L. WOLF, "Urbildliche Betrachtung", *Studium Generale*, 1951, t. 4, página 307.

REINO			FORMA BÁSICA
Espacio-tiempo			Punto-número
Materia	Energía	(Física)	Campo-corpúsculo
	Sustancia	(Química)	Átomo-molécula
Vida	Vegetativa	(Botánica)	Planta
	Sensitiva	(Zoología)	Animal
Espíritu			Hombre

1. En el dominio de la energía y de la masa. En el *reino "físico"* de la energía (o del efecto) y de la masa aparecen el espacio y el tiempo en forma de "éter" y duración. Se denomina "éter" al espacio, siempre que sea portador de todos los campos y corpúsculos y lugar de los cambios ("movimientos") de masas y energías (campos). El espacio, que puede imaginarse como un medio [2] homogéneo, infinitamente denso, continuo o discontinuo, sufre con esto una transformación debida a las fuerzas y a los corpúsculos. La duración es el tiempo, siempre que sea proyectable sobre entes espaciales y no sea considerado como históricamente irreversible. Se la mide por el transcurso de movimientos en el espacio. Su simetría resal-

[2] La manifestación de que un espacio o también un campo es homogéneo, ya es una declaración de simetría; significa que todos los dominios individualizados como "puntos" se comportan de igual manera. Véase también: P. NIGGLI, *Lehrbuch der Mineralogie und Kristallchemie*, loc. cit., 1ª parte, página 24.

ta en tipos simétricos cuya característica es el movimiento. La masa en su carácter de corpúsculo no aparece en el reino físico en una forma captable aun mediante el estudio de la simetría. Lo que en ella se exterioriza de manera activa, se puede asignar a movimientos y campos, con lo cual es captable por la simetría.

Una ojeada al reino de la física presenta multitud de manifestaciones simétricas, que existen o se desarrollan en el "éter" y en la duración. Como ejemplo de simetría traslatoria cabe mencionar los movimientos uniformes rectilíneos y ondas transversales. Los movimientos cíclicos son casos de simetría rotatoria; por ejemplo, los planetas o lunas, electrones en el átomo, o el campo eléctrico o magnético de un polo. La simetría reflexiva especular se evidencia en una balanza, en el péndulo o en las oscilaciones, como también en el principio de acción y reacción. La extensión se encuentra en ondas esféricas, en oscilaciones amortiguadas y en los espectros [1]. Las figuras acústicas de CHLADNI o el movimiento perihelial de planetas y electrones, verbigracia, pueden ser descritos mediante combinaciones de operaciones de superposición.

Si se desea ordenar estos fenómenos desde el punto de vista de la simetría, entonces se señalará para los *movimientos* que, en general, el cuerpo móvil cambia su lugar en el espacio y deja entonces una "traza". Para la simetría del movimiento esta traza es determinante. Según esto se verifican los siguientes tipos de movimientos:

Movimientos traslatorios, son los movimientos rectilíneos simples. En el sistema de la simetría pertenecen a las bandas isométricas infinitas. En el caso simple del movimiento uniforme la longitud de identidad es infinitamente pequeña. Si la trayectoria del movimiento está curvada en forma de circunferencia, entonces resultan *movimientos rotatorios.* La simetría de su trayectoria pertenece a los cuerpos poligonales isométricos finitos, en el caso más simple, a la circunferencia. Si el punto de rotación permanece fijo en el espacio, entonces pertenecen a la ortosimetría; si es móvil, entonces son kyrtosimétricos. Los *movimientos oscilatorios,* cuya traza oscila regularmente desde un punto en dos direcciones opuestas, presentan simetría reflexiva especular.

Como en la premorfología, se presentan aquí también combinaciones y acoplamientos. Un movimiento combinado de dos movimientos cíclicos es, por ejemplo, la trayectoria de la luna de un planeta alrededor del Sol. Un movimiento acoplado sería el movimiento oscilatorio no amortiguado, composición de traslación y oscilación. Los fenómenos isométricos descritos están idealizados pues no se consideraron las influencias específicas de

[1] Véase en K. L. WOLF, *Das Urbild des elementaren Atoms,* Stuttgart, 1950 (en la serie "Gesetz und Urbild"). Allí se encontrarán más datos sobre espectros y su relación con la estructura de los elementos de construcción.

la materia, tales como el frotamiento. Al encontrarse en el dominio material, que es el dominio superior siguiente, la isometría se reduce a la homeometría, como lo enseña la traza de una oscilación amortiguada en la figura 20.

Los movimientos son producidos por *campos* existentes en el "éter", que están ordenados tipológicamente de la siguiente manera:

Campos homogéneos: tienen la simetría de reticulados espaciales isométricos con traslación en el espacio.

Campos esféricos: son campos que parten de uno o varios polos puntiformes. Tienen la simetría de los cuerpos extendidos esféricos y sus subclases.

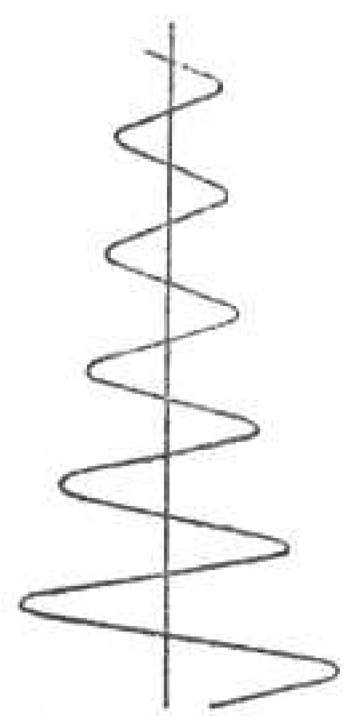


FIG. 20. *Oscilación amortiguada.*

Otros campos ("inhomogéneos") presentan, finalmente, en su formación típica, ametría.

La ametría es también la base del *principio de desorden,* que últimamente ha permitido un enunciado sobre el aumento de entropía[1]. La intensidad del movimiento desordenado de los corpúsculos es una medida de la temperatura. Al aumento de entropía se opone la incorporación de los campos y corpúsculos en la simetría del nivel superior siguiente, o sea, en el de la materia (principio de entelequia).

2. En el dominio de las sustancias. El ordenamiento lo sufren los corpúsculos (electrones, protones, neutrones) en el campo del *átomo.* Aquí existe un ordenamiento esférico extendido, según lo expresan modelos como el de NIELS BOHR. Inclusive cuando se consideran las trayectorias de los electrones en el átomo como elípticas, resultan subclases de la familia de los cuerpos esféricos. Con los elementos que están sometidos a este principio de la simetría (envoltura de los gases raros) se forman las *moléculas.* Alrededor de un átomo central Z se ubican átomos exteriores A en forma de moléculas, que tienen la simetría de la familia de los cuerpos esféricos[2]. Donde existen excepciones a esta regla, aparece una tendencia acentuada a llenar los claros en la estructura del cuerpo esférico. Así, por ejemplo, la molécula NH_3 con el átomo central N y los átomos exteriores H, que están ordenados en la posición que indica la figura 21, manifiesta la tendencia a completarse en un tetraedro mediante otro átomo de hidrógeno.

Las estructuras simétricas se presentan aún con mayor claridad y son también

[1] K. L. WOLF, *Theoretische Chemie,* loc. cit., página 18 y siguiente.

[2] K. L. WOLF, *Theoretische Chemie,* loc. cit., página 24 y siguiente.

visibles macroscópicamente, si los átomos y moléculas se ordenan en agrupamientos mayores, como son los *cristales*. En los cristales existe la condición de homogeneidad, es decir, repetición traslatoria de los motivos constructivos en el espacio. Luego aquí la traslación está trazada de antemano en el espacio; los 230 ordenamientos de los reticulados espaciales dan la posibilidad de ubicación de las partículas en el cristal [1].

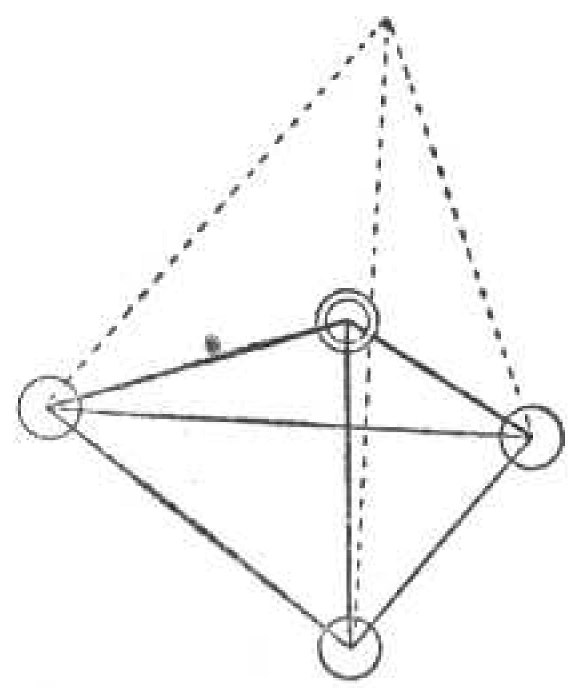


FIG. 21. *Pirámide del tipo* ZA_3.

En los líquidos el ordenamiento de las moléculas es menos simétrico. En ellos se encuentran agrupamientos ordenados de moléculas ya sólo en ámbitos más pequeños ("ordenamiento cercano"), mientras que a una distancia mayor los agrupamientos (simetría de los cuerpos esféricos) sólo tienen una conexión débil. Aquí la materia entra en el campo de la catametría.

En el *gas* "ideal" aparece finalmente el desorden completo, la ametría. Al pasar la materia del estado sólido al líquido, y de ambos estados al gaseoso, hay que agregar calor en cada caso; esto sugiere la conexión del principio de desorden con el movimiento calorífico, ya mencionado en el reino de la física.

En la observación de las *sustancias de origen orgánico*, aparece en los últimos tiempos como un interrogante hasta qué punto están formadas por el reino superior de la vida [2]. En todo caso ya se distinguen aquí propiedades del siguiente nivel superior, el biológico.

3. En el dominio de la vida. En los seres vivientes la materia prima tiene que estar creada de tal manera que éstos puedan cumplir las funciones básicas de la *vida:* recepción y respuesta a las excitaciones, respiración, alimentación y reproducción. En principio, esto puede ocurrir de muy diversas maneras, como se puede observar en la conformación y en las funciones variadas de los seres vivientes. Compárese solamente un alga con un vertebrado. En lo que sigue sólo se estudiarán los unicelulares y sus colonias y las plantas multicelulares. En cuanto se refiere a los animales multicelulares (metazoarios) y al hombre debemos conformarnos con alusiones (capítulo IV).

[1] Véanse los estudios sobre mineralogía, por ejemplo: NIGGLI, op. cit.

[2] W. TROLL, *Das Virusproblem in ontologischer Sicht*, Wiesbaden, 1951, página 119 y siguientes, y K. L. WOLF, *Theoretische Chemie*, Leipzig, 1953, 3ª edición.

a) Unicelulares

Entre los *unicelulares* están, por ejemplo, los protozoarios, que tienen tal diversidad que, además de formas sumamente simétricas (cuerpos poligonales y esféricos), aparecen algunos de forma tan indefinida que con ellos no se puede hacer ni siquiera la simple manifestación de identidad (amebas, *pantostomatineae*). Algunos órdenes de numulitos de la clase de los rizópodos presentan extensión rotatoria y un plano de simetría especular; un corte perpendicular al plano de reflexión especular hace aparecer la extensión refleja.

En unicelulares de la misma clase se puede observar extensión reflejo-traslatoria, por ejemplo, en la *Bolivina punctata.* La estructura de la *Staurodictya cruciata* representa un plano de extensión. Finalmente ocurren formas de cuerpos esféricos de alta simetría en radiolarios, por ejemplo: *Trissocircus sphäricus, Circogonia octahedrus* (simetría de cubo o simetría octaédrica) y *Circogonia dodecahedra* (simetría dodecaédrica). Como sólo es captable sistemáticamente su forma exterior, los esquizomicetos se ordenan tradicionalmente según su simetría en *coccaceae* con simetría esférica, *bacteriaceae* y *bacillariaceae* con forma de varillas, y *spirillaceae* con simetría helicoidal parcial. Entre las algas unicelulares, las peridineas presentan formas directamente extravagantes, que eventualmente dejan descubrir todavía un plano de reflexión especular o un eje de abatimiento o ambos, pero a menudo son completamente asimétricas. En cambio se encuentran seres altamente simétricos en las diatomeas; se pueden percibir líneas o planos privilegiados que facilitan un tratamiento ortosimétrico. Las *centricae* tienen franca simetría poligonal unilateral; las *pennatae* correspondientemente a sus movimientos propios, simetría uni o bivértice unilateral. Las desmidiaceas, que pertenecen a las conjugadas, presentan formas parecidas a las diatomeas, pero a diferencia con éstas representan polígonos bilaterales con un centro de simetría.

b) Colonias de unicelulares

La formación de *colonias* está difundida en primer lugar entre los protozoarios. En el grupo de los flagelados, por ejemplo, la *Synura uvella* forma colonias con la simetría de un cuerpo esférico. Los esquizomicetos presentan colonias con simetría de varilla (forma de *Streptococcus*), así como redes planas (forma de *Planococcus*) y reticulados (forma de sarcina). No aparece una simetría de red o reticulado completa debido a irregularidades en la división; la simetría de traslación que existe en el trazado sólo se cumple parcialmente. También en las diatomeas los individuos pueden juntarse en cadenas con simetría de traslación; si la dirección de traslación es constante, se forman varillas ortosimétricas. Un ejemplo, en el cual los individuos reducen su simetría propia original (simetría bivértice) en favor de la simetría total ("superformación"), lo da

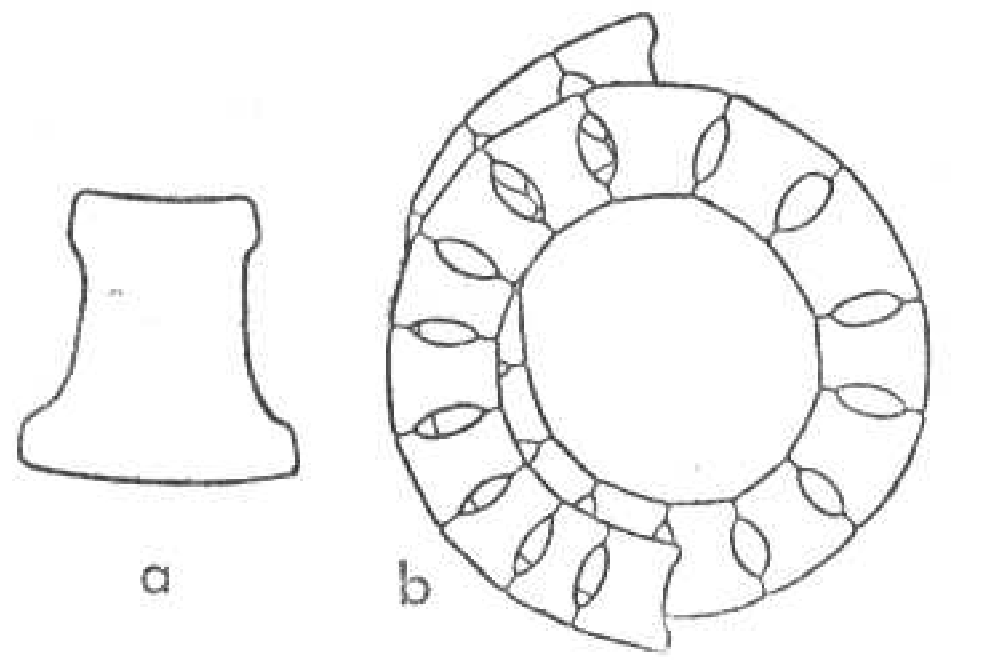


FIG. 22. *Eucampia zodiacus, individuo y colonia (según Engler-Prantl).*

senta colonias en forma de abanico con simetría rotatoria parcial. En las *chlorophyceae* aparecen, entre otras, colonias con la simetría del cuerpo poligonal bilateral, por ejemplo: *Volvox globator, Pediastrum, Riditeriella botryoides.*

Este panorama se completa con la tabla 4, adjunta con sus figuras correspondientes.

c) Plantas multicelulares

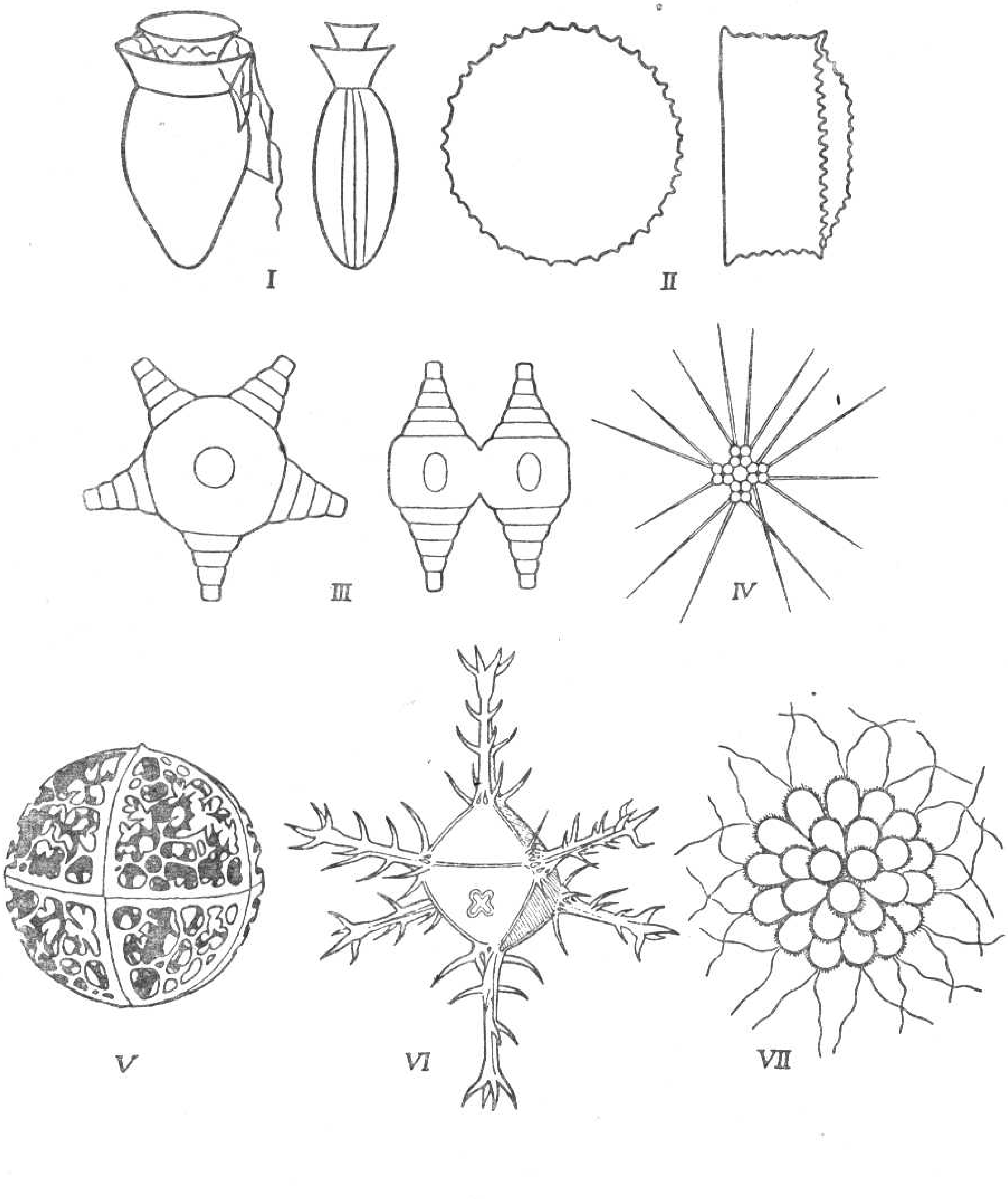
La particularidad de la forma de vida vegetal se manifiesta en la "forma abier-

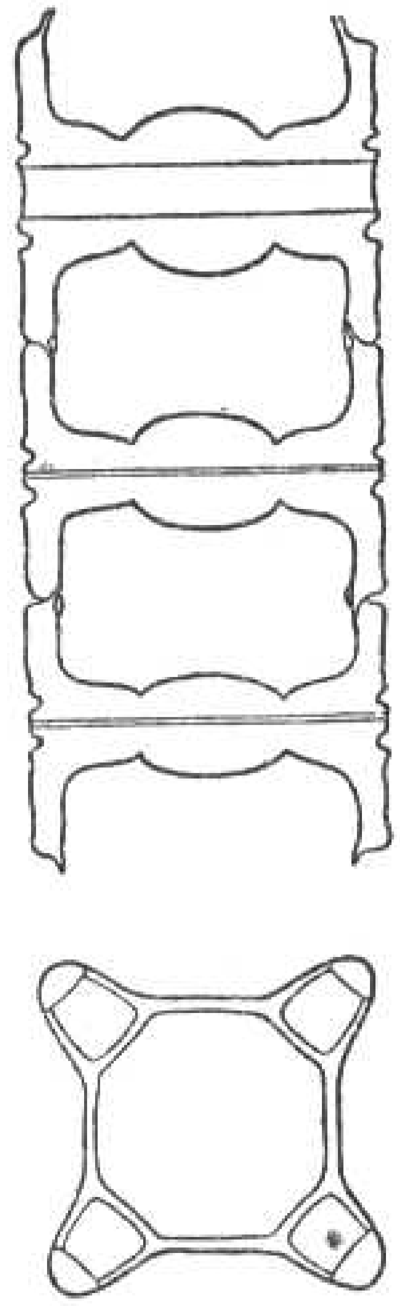
Cuerpo poligonal	*Dinophysis acuta*	I
	Eudictya campechiana	II
	Staurastrum crenulatum	III
	Colonia de *Richteriella botryoides*	IV
Cuerpo esférico	*Trissocircus sphaericus*	V
	Circoporus octahedrus	VI
	Colonia de *Synura uvella*	VII
Varillas	Colonia de *Hemiaulus esculptum*	VIII
Redes	Colonia de formas *Planococcus*	IX
Reticulados	Colonia de formas *Sarcina*	X
Varillas extendidas	*Bolivina punctata*	XI
Superficies extendidas	*Nummulita cummingii*	XII
Cuerpo esférico extendido	*Staurodictya cruciata*	XIII

TABLA 4. *Simetría en el dominio de las plantas unicelulares.*

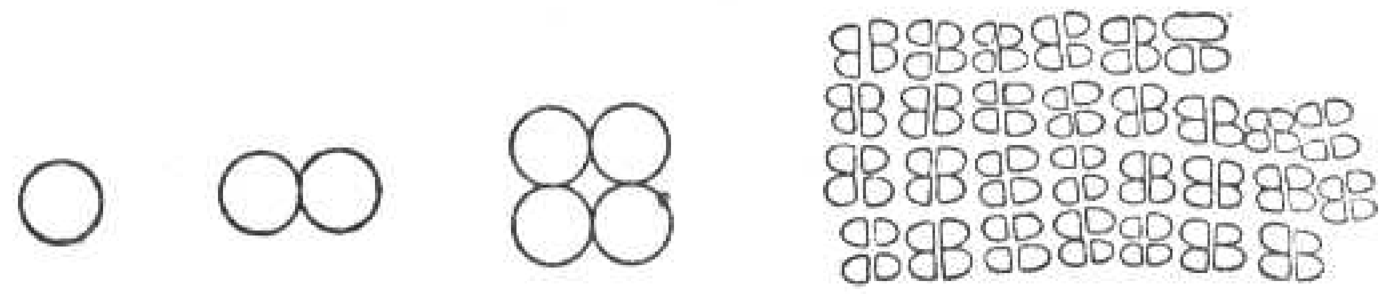
la *Eucampia zodiacus* (fig. 22), en la cual los individuos sólo tienen simetría univértice mientras que la colonia tiene simetría helicoidal. La *Licmophora flagellata,* de la misma simetría individual reducida, presenta" [1] de las *plantas multicelulares.* Esto significa que, a diferencia de los animales

[1] El concepto de la "forma abierta" de la planta proviene de W. TROLL, *Allgemeine Botanik,* Stuttgart, 1948, página 25.

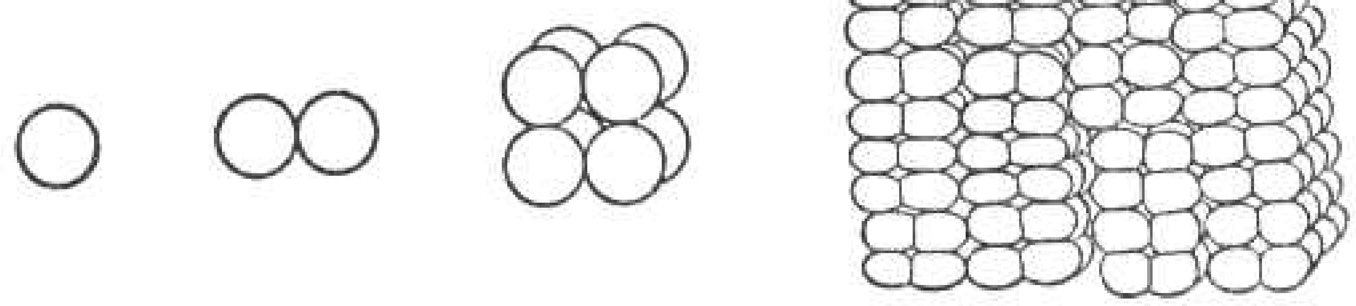

I
II
III
IV
V
VI
VII



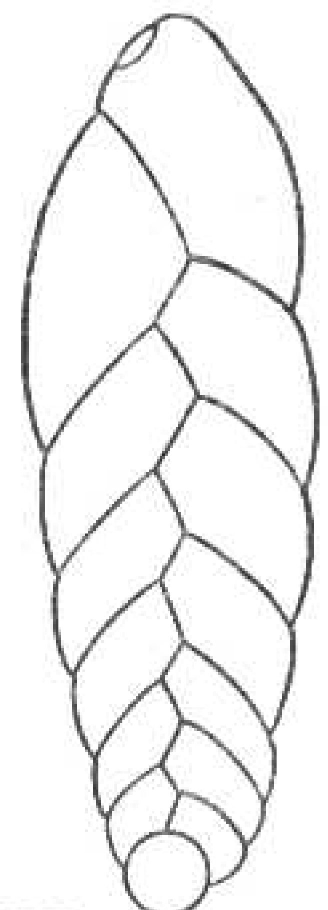
VIII



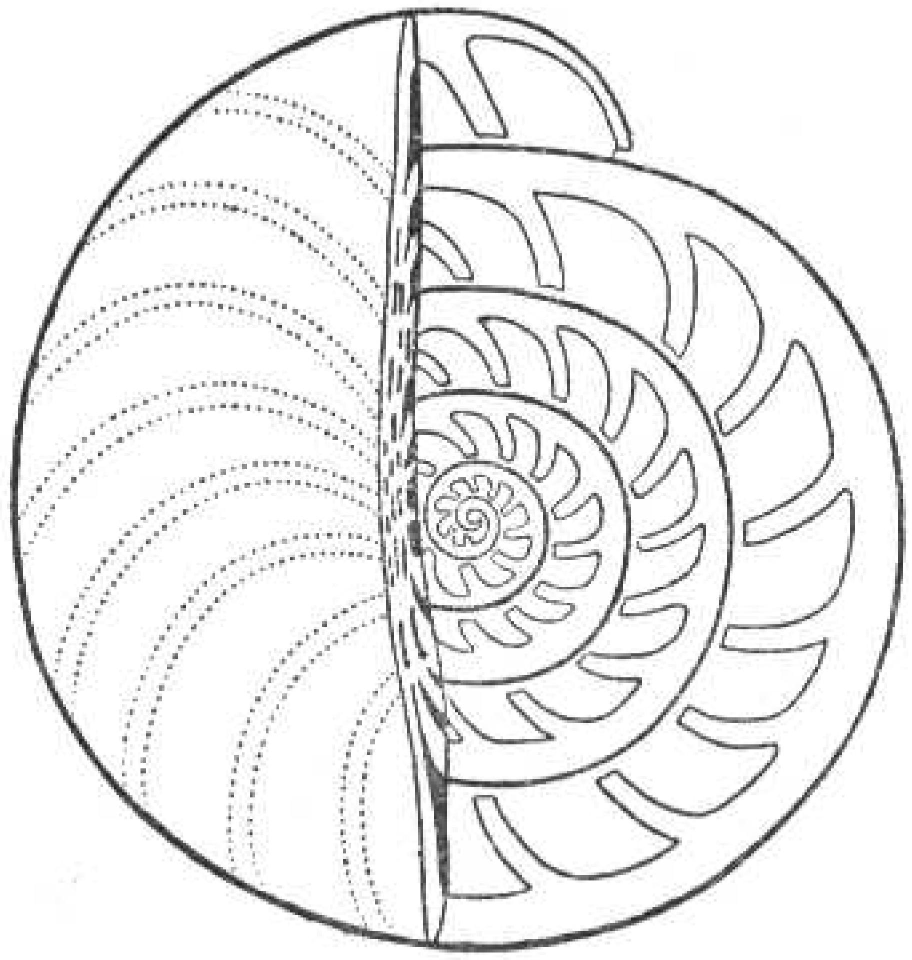
IX

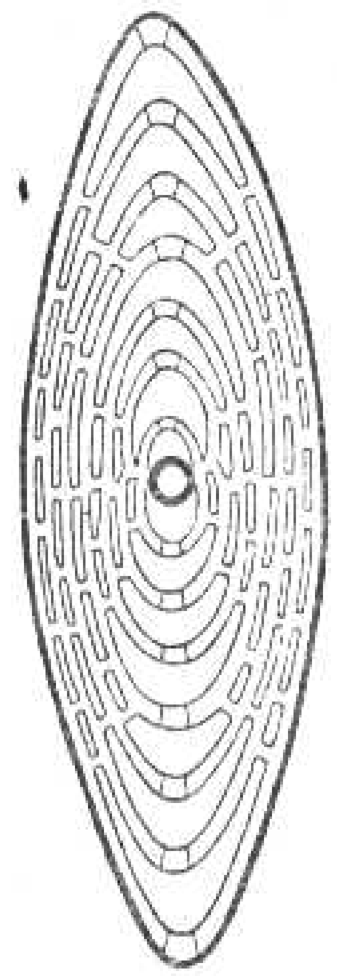


X

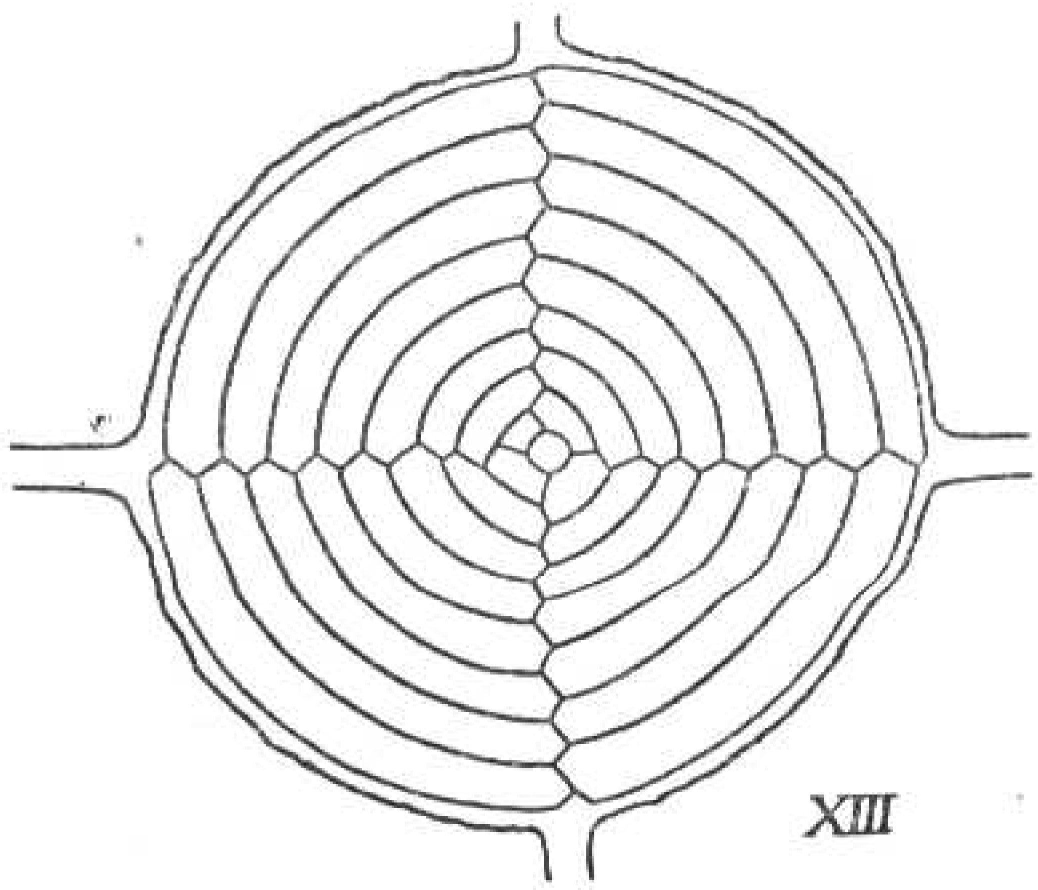


XI





XII



XIII

multicelulares, que ya proyectan todos sus órganos en el estado embrional y sólo los perfeccionan en el transcurso del desarrollo del individuo particular, las plantas multicelulares producen continuamente órganos nuevos, de tal manera que se puede decir que el crecimiento vegetal está caracterizado por la reproducción. Aquí reside el punto de partida para la captación del cuerpo vegetal según puntos de vista simétricos: tal como la forma abierta de la planta es característica de su modo de alimentación, respiración, crecimiento y reproducción, así también conduce al entendimiento de los fenómenos de simetría vegetales. Siendo formas abiertas, las plantas realmente pueden repetir en su cuerpo durante el crecimiento lo igual o lo parecido. Esta clase de formación habrá sido la razón por la cual los cuerpos de las plantas superiores se consideraron como repetición de hojas (GOETHE), o como miembros compuestos de una etapa de retoño más su hoja correspondiente (GAUDICHAUD, CELAKOVSKY) o de etapas de retoño con hoja y raíz (CHAUVEAUD)[1], lo que sería igual a una traslación pura (eventualmente con homeometría, motivada por metamorfosis).

El fenómeno de la *traslación,* ante todo, se presenta en las plantas en repeticiones en la dirección del crecimiento ("simetría longitudinal")[2]. Al hecho de que especialmente las plantas superiores presenten órganos opuestos en la punta y la base de su eje de traslación, se acostumbra denominarlo *polaridad.* Ésta, por principio, inhibe la aparición de un centro de simetría o, en general, planos de reflexión especular o ejes de rotación, perpendiculares a la dirección del crecimiento. La polaridad sólo entra en acción allí donde ya no vale la isometría como repetición de lo igual: por un lado cuando se confrontan cosas opuestas morfológicamente, por ejemplo, en el fenómeno biológico del desarrollo de raíz y brote, pero por otra parte, cuando una transformación de lo parecido lleva a la diferenciación en antagonismos polares, como puede aparecer en órganos particulares de las plantas, por ejemplo, en las ramificaciones de la base y la punta de la hoja representada en la tabla 5, VI, páginas 53 y 54. La polaridad sólo tiene algo que ver con la simetría, en tanto que distingue los polos de figuras homeométricas (o catamétricas); pero, inclusive entonces, única-

[1] Un panorama sobre estas teorías da W. TROLL, *Vergleichende Morphologie der hoeheren Pflanzen,* Berlín, 1937, tomo 1, 1ª parte, página 172 y siguientes, y 2ª parte, Berlín, 1939, página 2153 y siguientes, como también J. C. SCHOUTE, "On Phytonism", *Extrait du Recueil des Traveaux botaniques néerlandais,* 1931, volumen XXVII.

J. W. VON GOETHE, *Weimarer Sophienausgabe,* 2ª parte, tomo 7, página 82: "Todo es hoja y debido a esta simplicidad se vuelve posible la máxima variedad."

[2] No pueden darse aquí ejemplos. Véase para ello W. TROLL, "Symmetriebetrachtung in der Biologie", *Studium Generale,* 1949, t. 2, página 240, y *Allgemeine Botanik,* Stuttgart, 1948, página 79 y siguientes.

mente está caracterizado por la polaridad aquello que se pueda relacionar sólo por escalas intermedias, mediante operaciones de superposición. El crecimiento no incluye solamente traslación, sino también otras clases de repetición, por ejemplo rotaciones, reflexiones especulares, extensiones y sus acoplamientos. Siempre que éstos estén orientados en dirección perpendicular al eje longitudinal, se habla en botánica de simetría lateral.

Es típico para la formación vegetal, que se pueda producir crecimiento no sólo desde *uno*, sino desde varios puntos en dirección recta o alternada. Esta posibilidad se expresa en el desarrollo de una variedad de puntos de vegetación. Una observación simétrica completa de los cuerpos vegetales y sus órganos tan variadamente desarrollados, puede realizarse, debido a ello, tan sólo con la inclusión, tanto de la homeometría (ampliación o disminución de órganos que se repiten con la característica de la polaridad), como también de la kyrtosimetría (desviación de la progresión de punto, recta o plano en dirección recta o plana con la característica de "curvatura"). Además hay que considerar naturalmente el desarrollo simétrico parcial, ya que los ejes de traslación que aparecen y sus acoplamientos con otros órganos de simetría no llegan nunca a realizarse completamente con "rapport" infinito.

En donde el crecimiento continúa regularmente desde puntos, rectas o planos, pueden estar construidos ortosimétricamente individuos vegetales enteros, como también partes especiales, o sea, órganos particulares (por ejemplo, esporas, hojas, flores, semillas, frutos). La determinación de plantas se efectúa frecuentemente en los órganos ortosimétricos fáciles de describir. Los primeros sistemas vegetales artificiales también tomaban como base semillas o frutos (CAESALPIN) o flores (LINNEO) como características fácilmente accesibles para enumerar o para una caracterización formal. Puede resultar extraño que estos sistemas artificiales hayan conservado su justificación como precursores del sistema natural vegetal y que muchos grados de parentesco ya aparezcan formados previamente en ellos; esto es comprensible si se piensa que las relaciones de simetría son características muchas veces para grupos mayores, especialmente para familias. En relación con esto se señala la disposición de semillas y las semillas mismas [1].

La simetría de la disposición, formación y ramificación de las hojas está en relación con la simetría del *eje del brote*. En el cuerpo del eje, o sea, en su corte transversal, se deben diferenciar desarrollo circular o sea poligonal, elíptico y dorsiventral (fig. 23).

En general, los órganos laterales están aquí ordenados y formados correspondientemente con la simetría axial, de tal manera que hasta se puede llegar a con-

[1] K. GOEBEL, *Organographie der Pflanzen*, Jena, 1928, 3ª ed., t. 1, página 210 y siguientes, y 419 y siguientes.

clusiones sobre la simetría del eje del brote, considerando los órganos laterales. En este sentido son interesantes las relaciones entre la simetría axial y el follaje, en es-

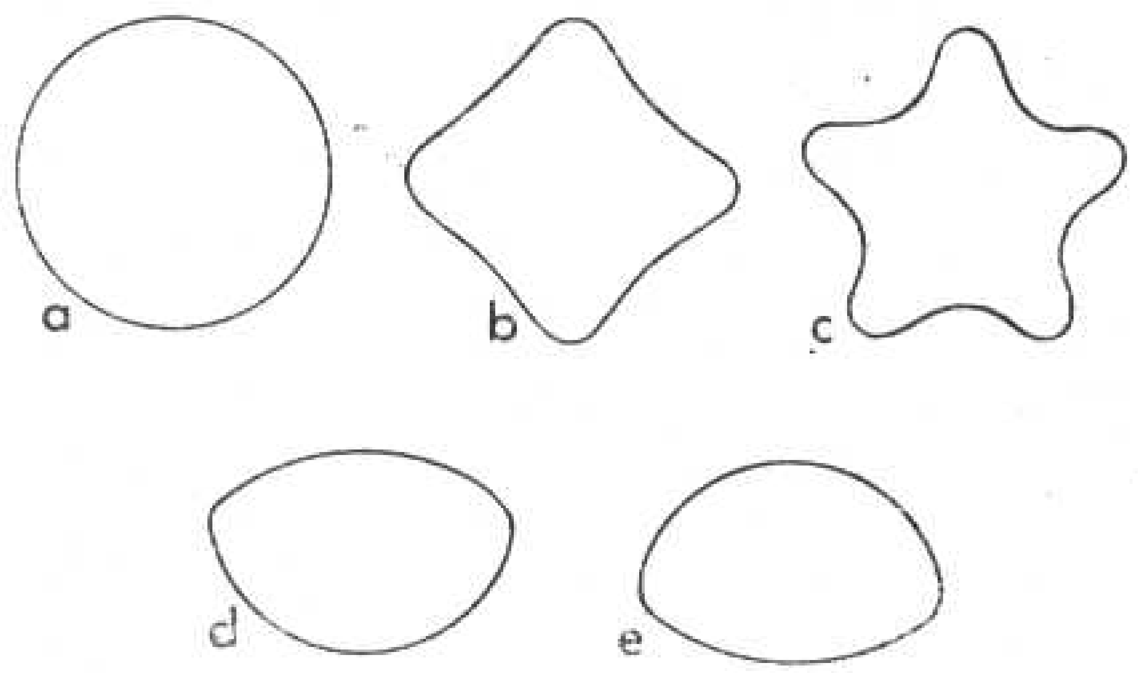


FIG. 23. *Cortes de ejes de brotes con simetría n-vértice (esquemático).*

a) $n = \infty$ (Ejemplo: *Tilia*)
b) $n = 4$ (Ejemplo: *Lamium* o *Molinia coerulea*)
c) $n = 5$ (Ejemplo: *Genista tinctoria*)
d) $n = 1$ (Ejemplo: *Halophila*)
e) $n = 1$ (Ejemplo: *Iris germanica*)

pecial en aquellos casos en los cuales las hojas están ordenadas en forma de verticilo. Si la construcción del eje del brote es "radial", entonces existe isofilia, es decir, las hojas alrededor de cada verticilo son de igual naturaleza, tamaño y forma. El corte transversal elíptico del eje permite, si las hojas están en posición decusada, dos posibilidades. Se hace una distinción entre la posición "ortogonal" y la "diagonal". En el primer caso, en el cual los planos de simetría de la hoja se ordenan en los dos planos de reflexión especular del eje, los mismos órganos de la hoja son simétricos, pero las hojas de verticilos vecinos son diferentes entre sí (anisofilia, fig. 24*a*). Aunque si las hojas están separadas de los planos de reflexión especular del cuerpo axial, entonces existe isofilia, pero todas las hojas son asimétricas (fig. 24*b*). La ampliación de este comportamiento lleva a lo pseudodístico, es decir, las hojas que están en posición decusada se ordenan aparentemente en dos líneas longitudinales (fig. 24*c*). En total, brotes de esta especie presentan bandas simétricas (traslación de cuerpos bivértices). La construcción dorsiventral del brote, habiendo posición diagonal de las hojas, produce una forma de anisofilia que está marcada por una asimetría de todas las hojas y la formación diferenciada de los dos miembros de cada verticilo (por

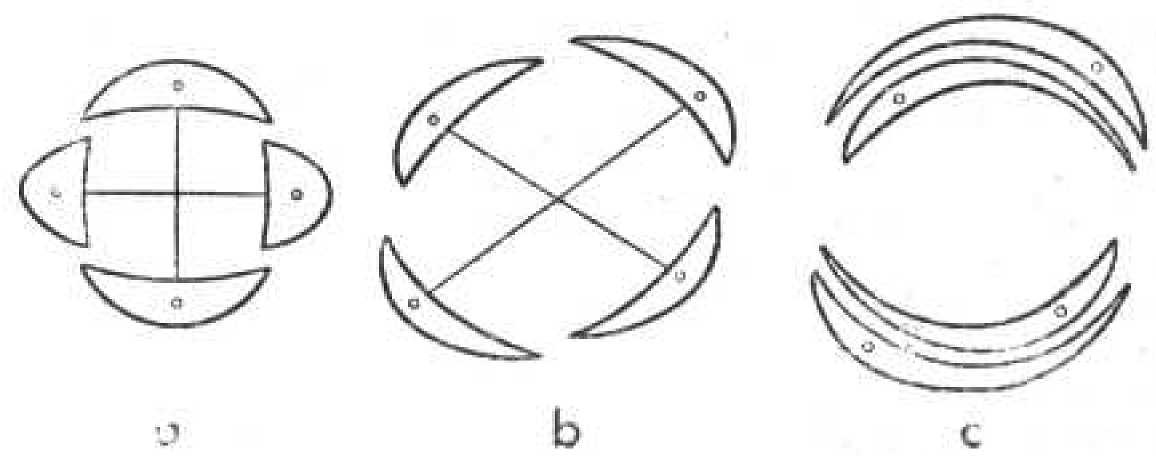


FIG. 24. *Anisofilia y asimetría de hojas, siendo el corte del eje transversal.*

a) Posición ortogonal
b) posición diagonal
c) posición diagonal ("pseudodística")

ejemplo clases de *Selaginella* y *Columnea picta* [1]).

La simetría del cuerpo axial se expresa, además del follaje, también en su *ramificación* (*iso y anisocladía* [2]). La dicoto-

[1] W. TROLL, *Vergleichende Morphologie* loc. cit., Berlín, 1949, 1ª parte, tomo 1, página 396 y siguientes.

[2] W. TROLL, *Allgemeine Botanik*, loc. cit., página 84.

mía es instructiva en este aspecto. Si hay actitud básica dicótoma, en general los ejes del brote con corte circular se ramifican en forma "cruciat", y con corte elíptico en forma "flabellat" (fig. 25)[1].

Estos ejemplos de simetrías que sobre-

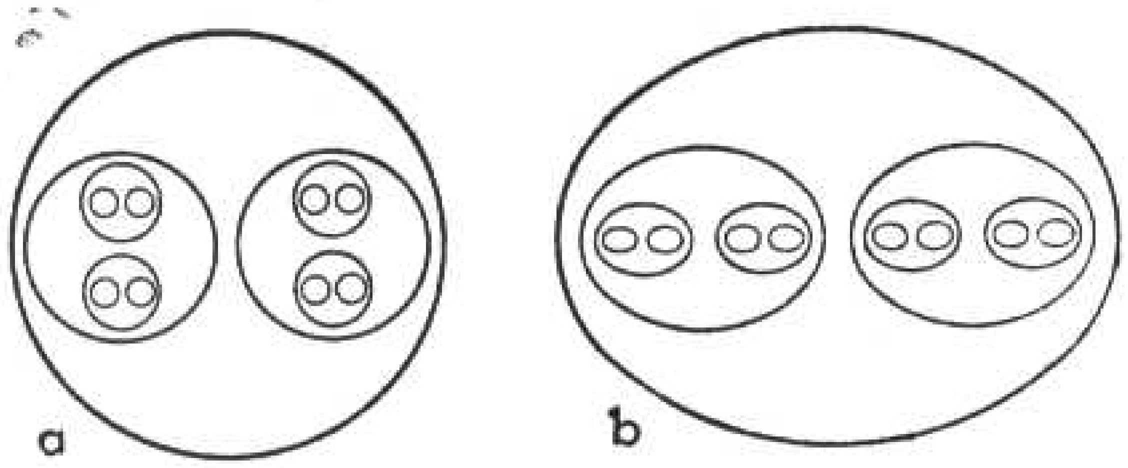


FIG. 25. *Corte de la ramificación dicótoma.*

a) cruciat
b) flabellat

pasan sus límites, no deben llevar a la suposición de que tales dependencias simples de formas u órganos simétricos particulares del plan de construcción total sean siempre válidas. La transición del estado vegetativo al estado fértil se produce, ante todo, con un cambio en la simetría de la planta, pero su forma abierta también le da a ésta ocasión de cambiar su simetría durante el crecimiento.

La tabla 5, página 53, con sus figuras

[1] W. TROLL, *Vergleichende Morphologie,* loc. cit., Berlín, 1949, 1ª parte, tomo 1, página 474.

correspondientes muestra un resumen de las relaciones de simetría de las plantas multicelulares, en especial de aquellas con semilla.

Por principio, aquí también alcanza siempre la indicación de los órganos de simetría en clase, cantidad y posición. Compárese en relación con esto, el esquema de la figura 26, que se refiere especialmente a plantas con semillas; la flecha indica la dirección del eje de traslación, rotación y extensión. Existe la posibilidad de formación de varillas iso y homeométricas, que se derivan de una alineación

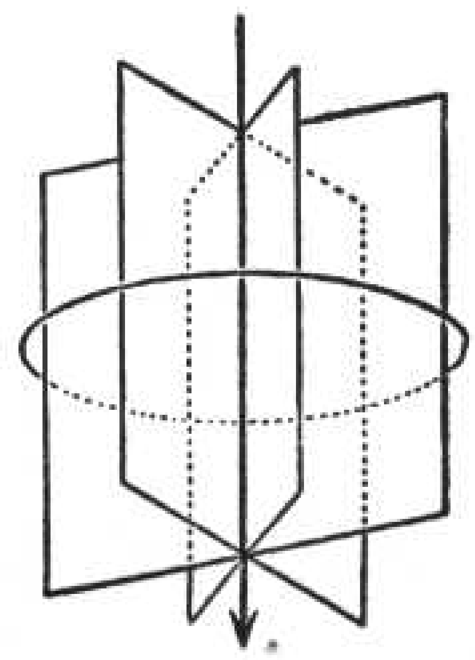


FIG. 26. *Esquema de los órganos de simetría de las plantas con semillas.*

de cuerpos poligonales unilaterales. Como la dirección del crecimiento indicada por la flecha es variable, puede aparecer kyrtosimetría (la fig. 27 da como ejemplos de kyrtosimetría: dicotomía y dicasio).

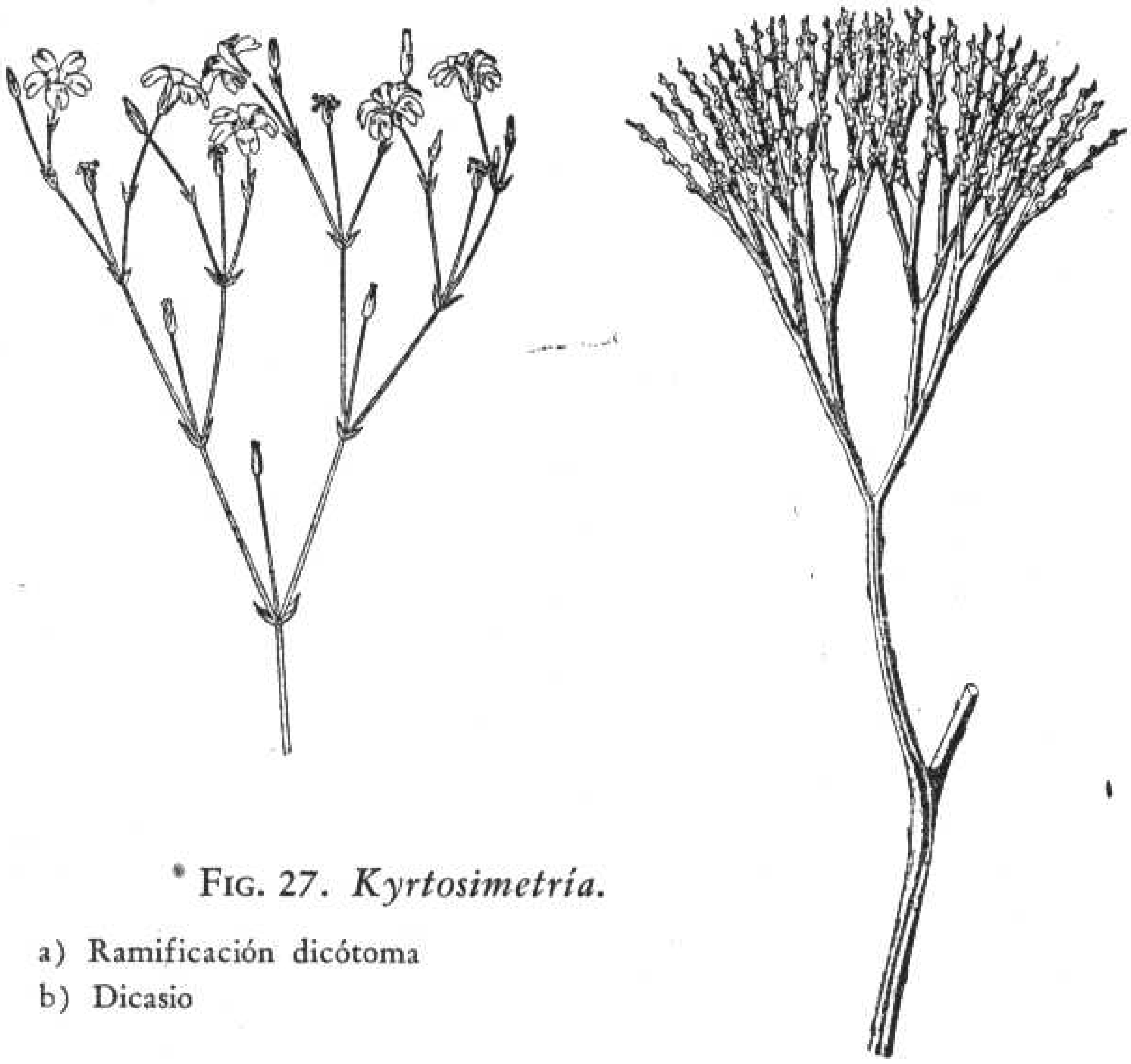
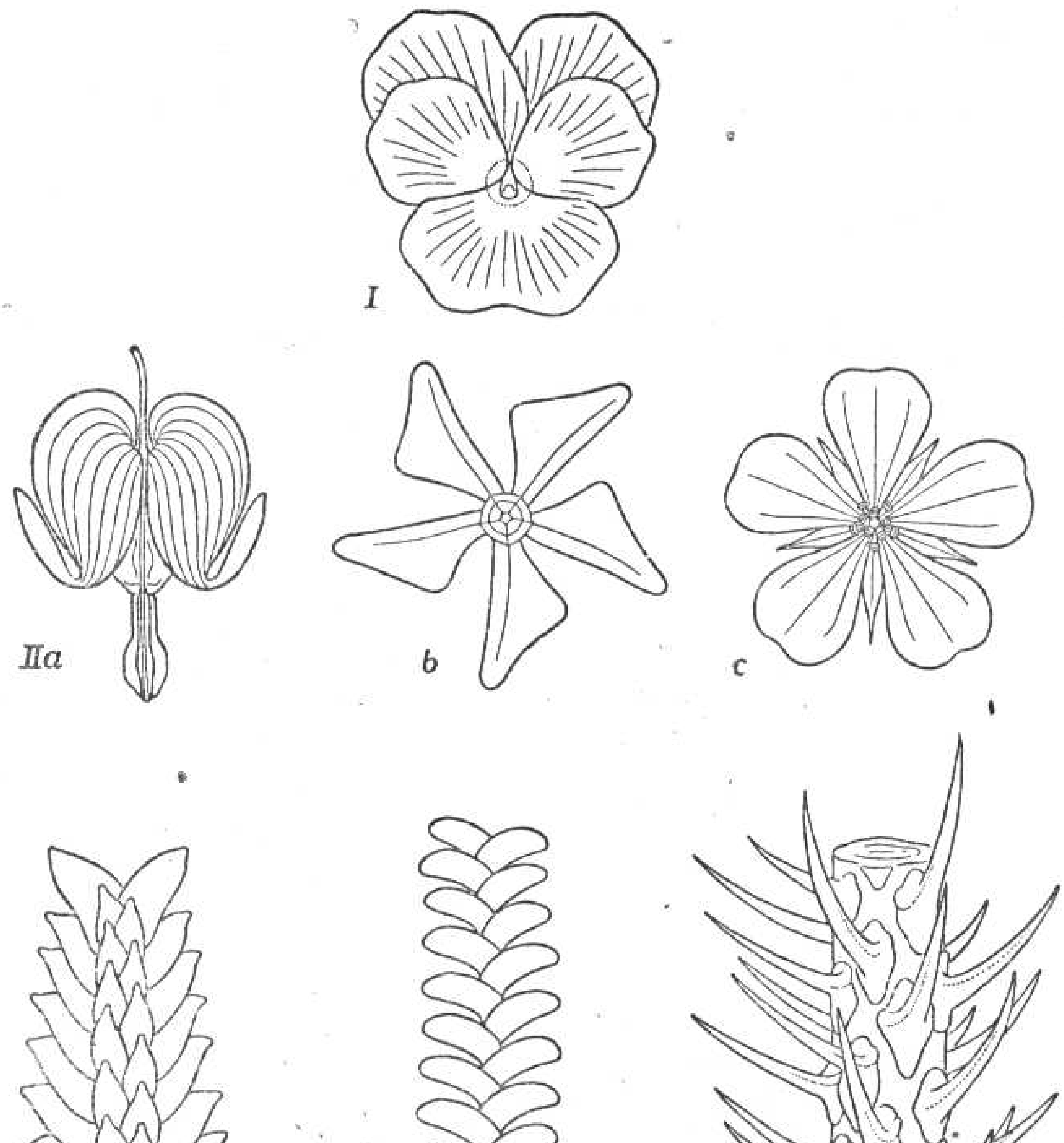


FIG. 27. *Kyrtosimetría.*

a) Ramificación dicótoma
b) Dicasio

Cuerpo poligonal, unilateral	*Viola tricolor*	I
	Dicentra spectabilis,	
	Vinca herbacea, Geranium	II *a, b, c*
Cuerpo poligonal, bilateral	———	
Cuerpo esférico	———	
Varillas	*Lycopodium carolinianum*	III
	Angraecum distichum	IV
	Araucaria excelsa	V
Redes	———	
Reticulados	———	
Varillas extendidas	*Polypodium vulgare*	VI
	Thuja	VII
	Encephalartos altensteinii	VIII
Superficies extendidas	———	
Cuerpos esféricos extendidos	———	

TABLA 5. *Simetría en el dominio de las plantas multicelulares.*


I
IIa
b
c
III
IV
V
VI
VII
VIII

LA SIMETRÍA EN EL REINO ANIMAL Y EN EL HOMBRE

Si en el dominio de los campos y corpúsculos, como también en el de los unicelulares, se nos muestra ampliamente todavía la abundancia total de altas simetrías, entonces los vegetales superiores tienen aún posibilidades de simetrías variadas, pero progresivamente reducidas por el fenómeno de la polaridad al aumentar su perfección. Con la creciente abundancia de sentidos, aparecen más y más órganos particulares no parecidos, pero que, a su vez, deducen su sentido formal del total. En los *animales* multicelulares también existen todavía muchas posibilidades de simetría. Así, CUVIER [1] pudo articular el reino animal, según puntos de vista de la simetría, en vertebrados e insectos con simetría traslatoria (los vertebrados tienen las divisiones interiormente y los insectos exteriormente), animales con rayos y divisiones alrededor de un eje y los moluscos sin estas divisiones.

[1] Véase, por ejemplo, K. E. VON BAER, *Lebensgeschichte Cuviers*, Braunschweig, 1897, página 55.

La traslación, que se expresa en el cuerpo axial de la planta mediante la alternación de *nodos* e *internodos*, aparece en la segmentación del cuerpo animal. Tómese como ejemplo la escolopendra (fig. 28). En otros articulados, por ejemplo,

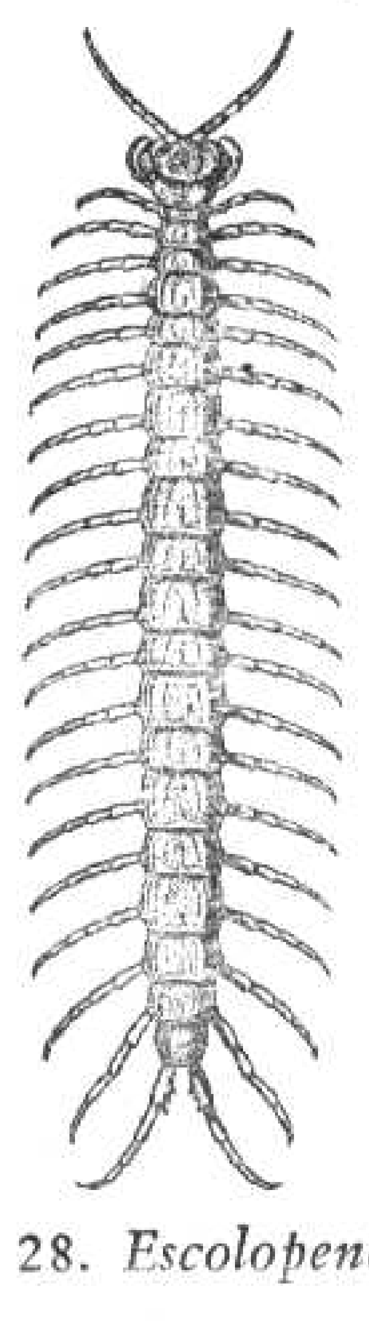


FIG. 28. *Escolopendra.*

el cangrejo (fig. 29), la igualdad de la segmentación ya sólo aparece inmediatamente en forma parcial (en el abdomen posterior), en correspondencia con una diferenciación más acentuada según las diversas funciones. También en lo demás se exterioriza la organización de los animales, que está ampliada en comparación con la de las plantas y que se presenta con una mayor disminución de las semejanzas y la pérdida de la coordinación entre las formas de las partes y del todo, en una reducción todavía más pronunciada de las posibilidades de simetría.

Una oposición entre interior y exterior no conocida en las plantas, se comprende por la forma cerrada y la traslación de los órganos hacia el interior del cuerpo. Portmann, que en su libro *La forma animal*[1] trata la relación entre el nivel de la organización y la simetría, describe la influencia de esta oposición con las palabras: "La exposición, con la cual caracterizamos la gran mayoría de los grupos animales como "bilateria", vale realmente sólo para el exterior y para las más tempranas disposiciones de los órganos internos. Únicamente en las formas más simples de animales bilaterales puede permanecer en vigor, en el cuerpo maduro, la simetría rigurosa de la disposición. Pero nunca una construcción regular tal puede realizar una organización superior. Formas de vida superiores, que se basan en una formación del cuerpo más rica, presentan otro aspecto. Aunque los órganos internos también aquí se producen casi siempre simétricos, esta regla de construcción es desplazada en el interior tempranamente durante el desarrollo por otra forma de construcción, que garantiza un pleno aprovechamiento del estrecho espacio de la cavidad abdominal: la organización interna se vuelve asimétrica."

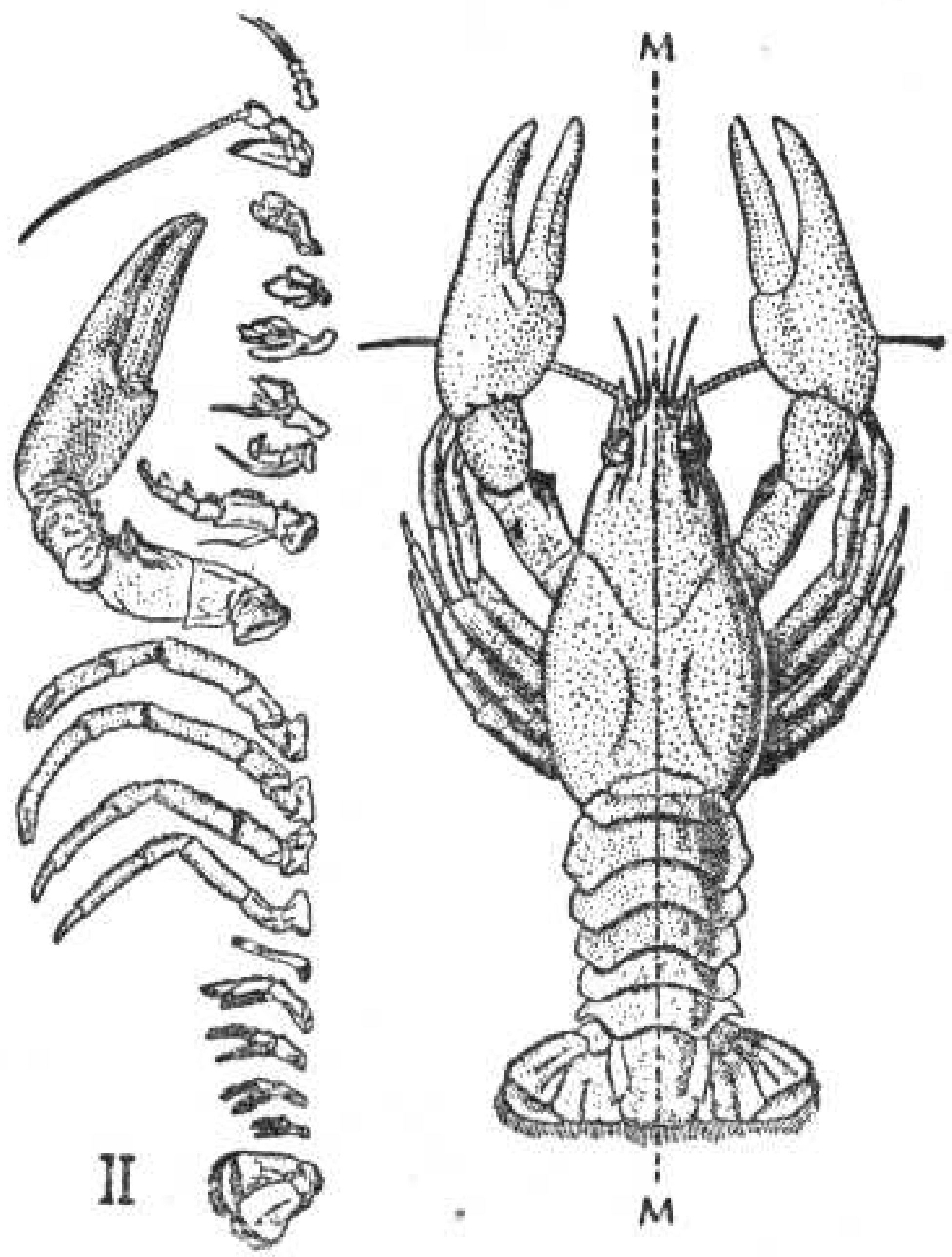


Fig. 29. *Cangrejo.*

Finalmente, el cuerpo humano tiene todavía, en su primera disposición, la simetría del cuerpo univértice. Pero aquí también se abandona ésta en un estado temprano del desarrollo corporal en el interior de la cavidad abdominal. Además, se expresa aquí la progresiva diferenciación mental, notable también exteriormente, ante todo en la asimetría de la cara, importante para la expresión intelectual y considerada en todas las representaciones figurativas del hombre, de tal

[1] Para más detalle, véase de A. Portmann, *Die Tiergestalt*, Basilea, 1949, página 25.

manera que el ser humano queda a la postre con sólo un indicio de simetría univértice.

En cada uno de los reinos naturales existe un perfeccionamiento de las formas inferiores hacia las superiores; a este avance de un dominio hacia el siguiente le corresponde del mismo modo un aumento del sentido de los fenómenos. A cada aumento le corresponde una pérdida de simetría; ya que "cuanto más perfecto es un ser, tanto menos parecidas se vuelven sus partes entre sí. En aquel caso el total es más o menos igual a las partes; en éste, el total no es parecido a las partes. Cuanto más parecidas sean las partes entre sí, tanto menos estarán subordinadas las unas a las otras. La subordinación de las partes señala a un ser más perfeccionado" [1].

[1] J. W. von Goethe, *Weimarer Sophienausgabe,* parte II, tomo 6, página 11.

ÍNDICE

SE ACABÓ DE IMPRIMIR
EN AGOSTO DE 1959, EN LOS
TALLERES GRÁFICOS DIDOT, S. R. L.
LUCA 2223, BUENOS AIRES

FORMA Y SIMETRÍA
K. L. Wolf y D. Kuhn

La ciencia, la filosofía y las artes modernas están empeñadas en el estudio exhaustivo de las formas naturales y de los distintos elementos que las componen. Para ello es necesario el conocimiento de las leyes que rigen la formación de los cuerpos, leyes para las que es fundamental el concepto de simetría.

FORMA Y SIMETRÍA es un valioso instrumento de análisis de las diferentes clases de simetría existentes. Mediante un ordenado estudio de las operaciones elementales, presenta un panorama completo de dichas clases y su aplicación al conocimiento de los cuerpos naturales, los animales y el hombre, conocimiento que puede ser extendido sin dificultad a los problemas de la visión y el diseño.

ALGUNOS TÍTULOS DE ESTA COLECCIÓN

INTRODUCCIÓN A LA TOPOLOGÍA COMBINATORIA / M. Fréchet y Ky Fan.
LA EXPRESIÓN CORPORAL DEL COMEDIANTE / J. Doat.
LA RAZÓN / G.-G. Granger.
LOS SATÉLITES ARTIFICIALES / Ch.-N. Martin.
LOS FRACASOS ESCOLARES / A. Le Gall.
SÓCRATES / R. Mondolfo.

CUADERNOS: breves, claros, didácticos.

C 5